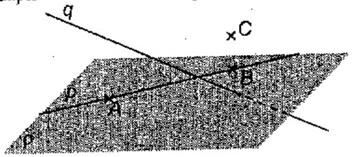
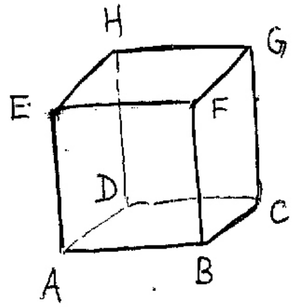
Základní vztahy mezi body přímkami a rovinami

-1-

Př. 2: Zapiš situaci na obrázku pomocí vztahů mezi body, přímkami a rovinou.



Př. 3: Nakresli obrázek, který odpovídá situaci: $A\in p$, $p\not\subset\rho$, $B\in p$, $B\in q$, $q\subset\rho$.



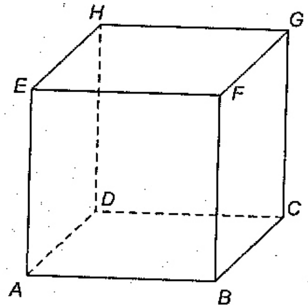
Př. 4: Doplň souvětí:
a) Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ, pak …
b) Jestliže v rovině ρ leží dva body A, B, které určují přímku p, pak …

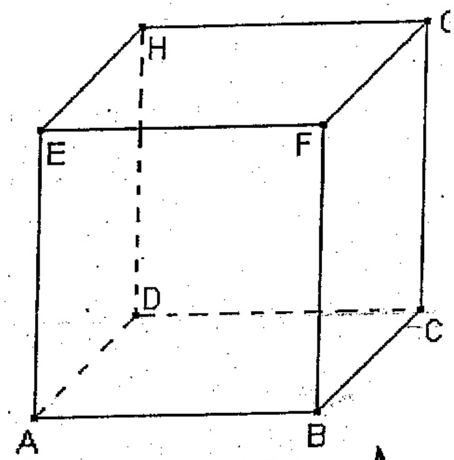
Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka ⇒ proto můžeme psát přímka p nebo přímka AB ($\leftrightarrow AB$).

Př. 5: Najdi všechny způsoby, jak může být pomocí bodů a přímek určena rovina.

Každá rovina je jednoznačně určena:
- **třemi body, které neleží v téže přímce** ⇒ u bodů A, B, C pak mluvíme o rovině ABC ($\leftrightarrow ABC$)
- **přímkou a bodem, který na ní neleží** ⇒ u bodu A a přímky p pak mluvíme o rovině Ap ($\leftrightarrow Ap$)
- **dvěma různoběžnými přímkami** ⇒ u přímek p a q pak mluvíme o rovině pq ($\leftrightarrow pq$)
- **dvěma různými rovnoběžnými přímkami** ⇒ u přímek p a q pak mluvíme o rovině pq ($\leftrightarrow pq$)

Př. 7: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky ED, AS_{GH} a rozhodni, zda leží v rovině. $\leftrightarrow ADH$

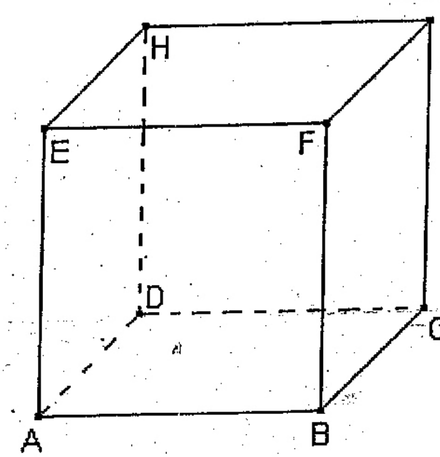


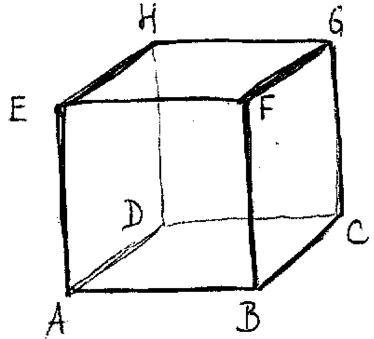


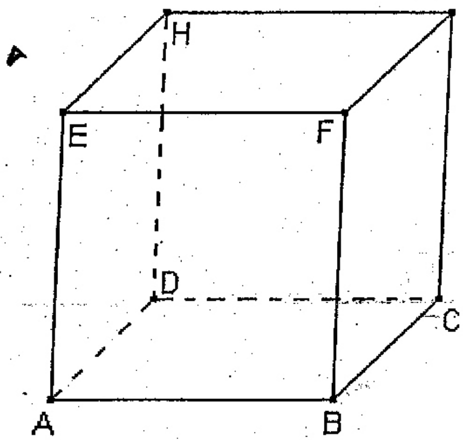
Př. 8: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky EF, AS_{CG} a rozhodni, zda leží v rovině. $\leftrightarrow ACE$

$\leftrightarrow DF$

Př. 9: Je dána standardní krychle. Rozhodni zda leží v jedno rovině body:
a) B, D, G, H
b) S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG}
c) S_{AE}, S_{AB}, S_{DC}, G
d) E, S_{GH}, S_{AB}, C







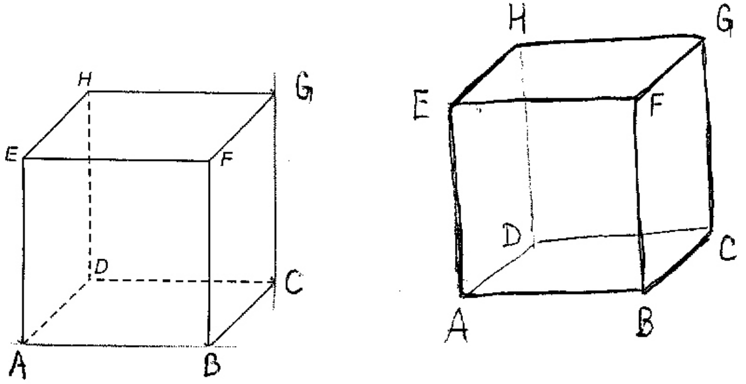
[Výsledky: př. 7: ED ✓ AS_{GH} ✗ př. 8: ~~EF~~ ~~DF~~ AS_{CG} př. 9: a) NE b) ANO c) NE d) ANO

Vzájemná poloha dvou přímek

-2-

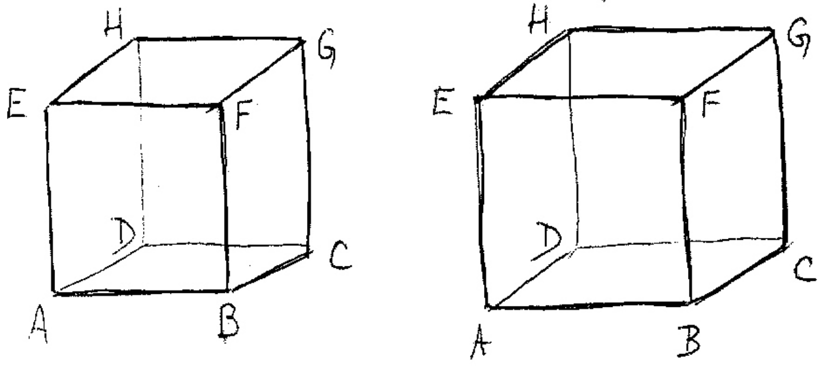
Planimetrie: dvě možnosti pro vzájemnou polohu přímek
- různoběžky – právě jeden společný bod (různý směr)
- rovnoběžky – žádný společný bod (stejný směr)

Možnosti vzájemné polohy dvou přímek v prostoru:
- **různoběžky** – právě jeden společný bod (různý směr, určují rovinu)
- **rovnoběžky** – žádný společný bod (stejný směr, určují rovinu)
- **mimoběžky** – žádný společný bod (různý směr, neurčují rovinu, tato možnost nemůže nastav v rovině) (NEJSOU ROVNOBĚŽNÉ A PŘESTO NEMAJÍ PRŮSEČÍK)

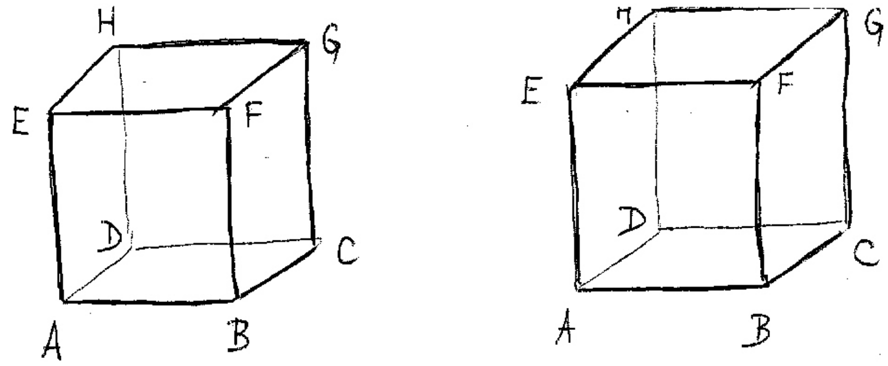


Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči vzájemnou polohu přímek:

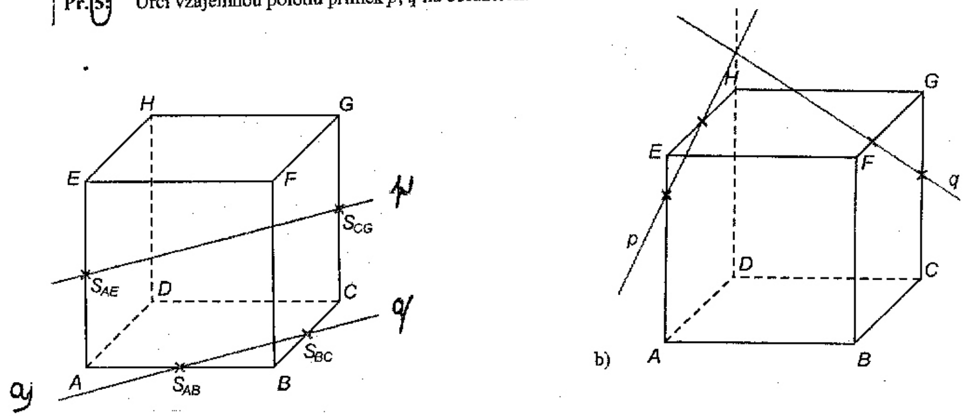
a) $S_{AE}S_{EH}$; HC b) AS_{CG}, BD c) AB, $S_{BC}S_{CD}$ d) BC, $S_{AE}S_{DH}$ e) EC, BH g) AB, CG



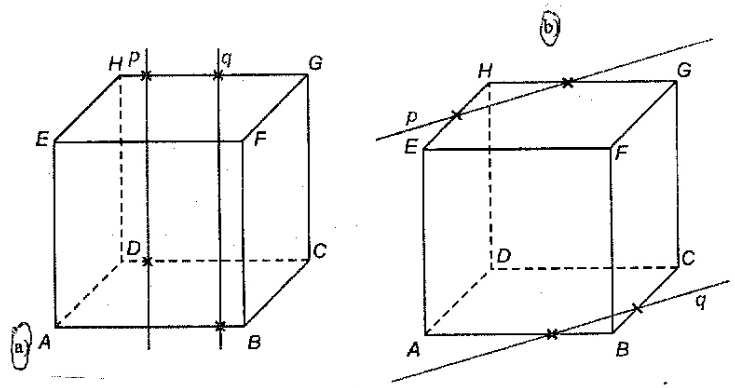
[výsledky: ⓐ M; ⓑ M; ⓒ Růz; ⓓ Rovn; ⓔ Růz; ⓖ M;



Př. 5: Urči vzájemnou polohu přímek *p*, *q* na obrázcích:



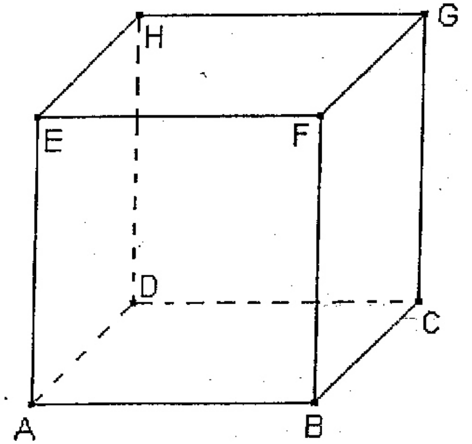
Př. 6: Urči vzájemnou polohu přímek *p*, *q* na obrázcích (průměty, které se zdají být rovnoběžné, jsou rovnoběžné):



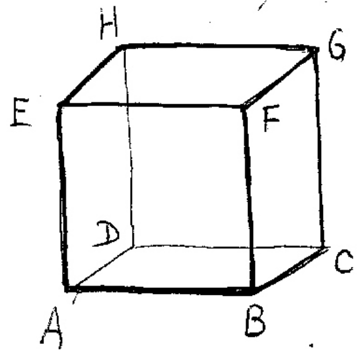
[výsledky: Př 5: ⓐ Rovn; ⓑ M : Př 6: ⓐ M; ⓑ Rovn]

(*) URČETE VZÁJEMNOU POLOHU PŘÍMEK:

[A] ↔ DS_{AB} ↔ GS_{FB}



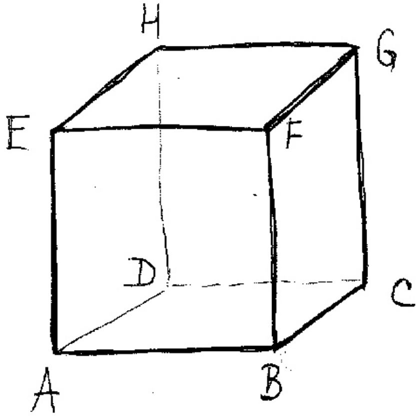
[B] PŘÍMKY AS_{GH} DS_{AB}

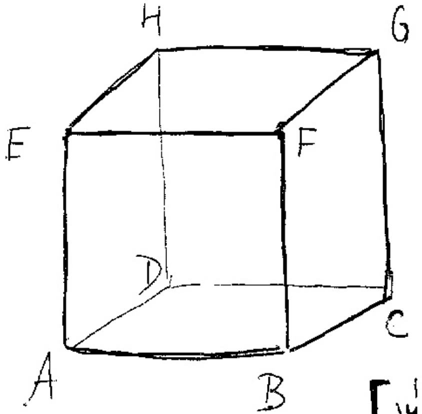


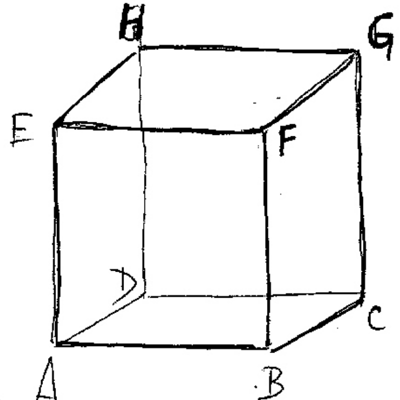
[C] PŘÍMKY BS_{CG} ; AS_{CH}

[D] PŘÍMKY AS_{CH} ; S_{AE} S_{GH}

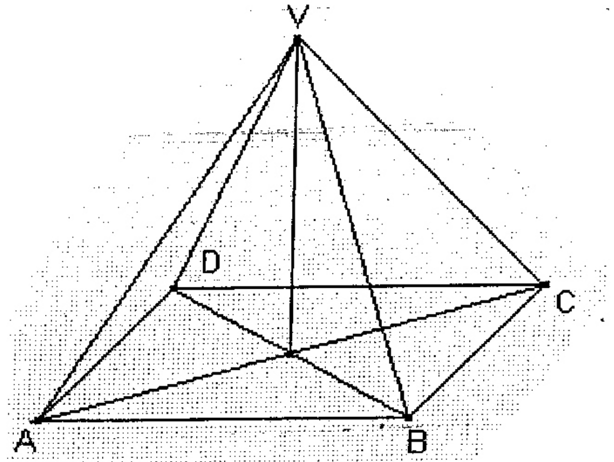
[E] PŘÍMKY EC ; AS_{GH}







[F] ↔ AS_{DV} ; BS_{CV}

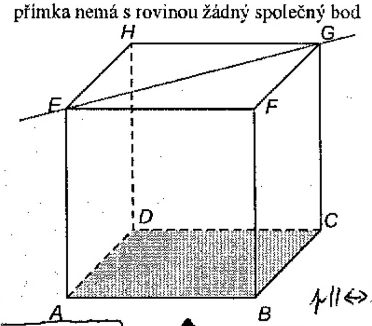


[Výsledky (*): (A) Růz. (B) M. (C) Růz. (D) Rovn. (E) M (F) Růz.]

Vzájemná poloha přímky a roviny

Mohou nastat tři možnosti:

přímka nemá s rovinou žádný společný bod

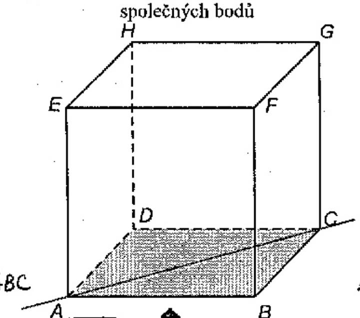


$p \cap \leftrightarrow ABC = \emptyset$

$p \parallel \leftrightarrow ABC$

přímka je rovnoběžná s rovinou

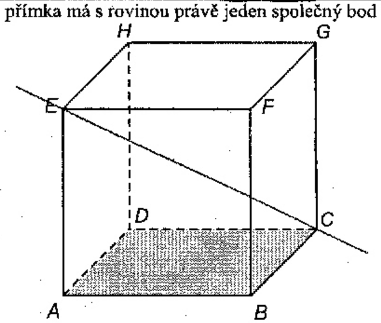
přímka má s rovinou nekonečně mnoho společných bodů



PŘÍMKA LEŽÍ V ROVINĚ

$p \cap \leftrightarrow ABC = p$

přímka má s rovinou právě jeden společný bod



přímka je různoběžná s rovinou

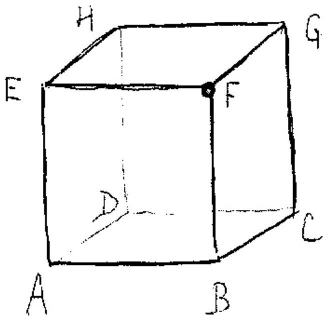
$p \cap \leftrightarrow ABC = \{C\}$

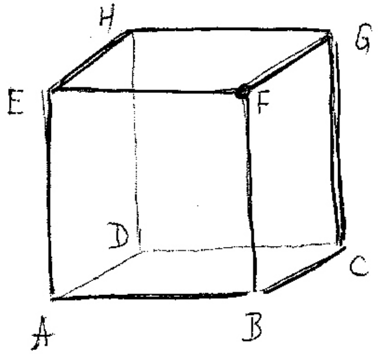
PRŮSEČÍK PŘÍMKY A ROVINY

Vzájemná poloha přímky a roviny → PŘ.

Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:
Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, jestliže v rovině ρ leží alespoň jedna přímka p', která je s přímkou p rovnoběžná.

1) Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči všechny přímky určené vrcholy krychle a procházející bodem F, které jsou:
a) rovnoběžné s rovinou ADE b) různoběžné s rovinou ADE



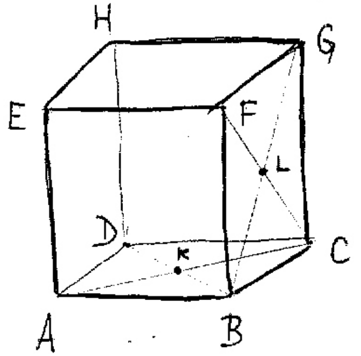


2) URČI VZÁJEMNOU POLOHU PŘÍMKY A ROVINY:

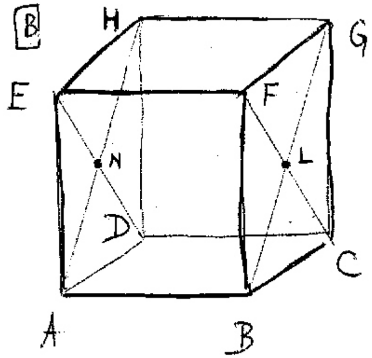
A) ↔ KL ↔ CDH
B) ↔ LN ↔ ABG
C) ↔ LM ↔ BCE
D) ↔ KN ↔ EFG

K .. STŘED ABCD
L .. STŘED BCFG
M .. STŘED EFGH
N .. STŘED ADHE

A)



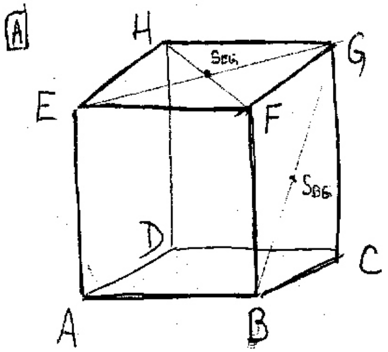
B)



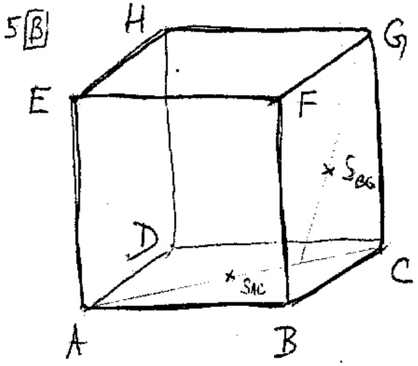
[výsledky: a) FB, FC, FG; b) FA, FD, FE, FH; 2) A) C) ROVN; B) LEŽÍ V ROV.; D) RŮZN.]

Př. 5: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči vzájemnou polohu:
a) přímky $S_{EG}S_{BG}$ a roviny ABC
b) přímky $S_{AC}S_{BG}$ a roviny CDG
c) přímky $S_{BG}S_{AH}$ a roviny CDE
d) přímky $S_{EG}S_{BG}$ a roviny BCE
e) přímky $S_{EG}S_{BF}$ a roviny ABG

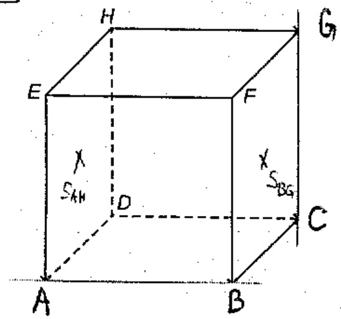
5 A)



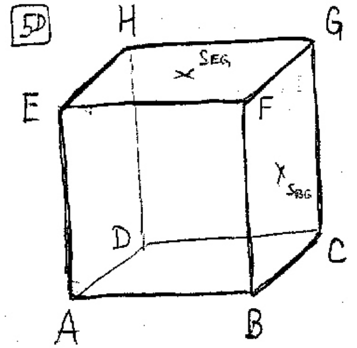
5 B)



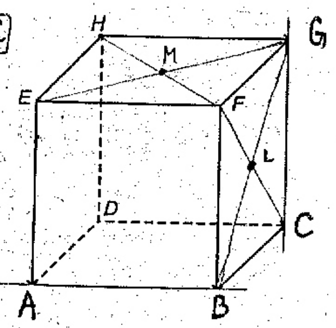
5C)



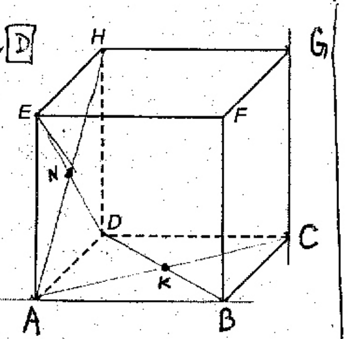
5D)



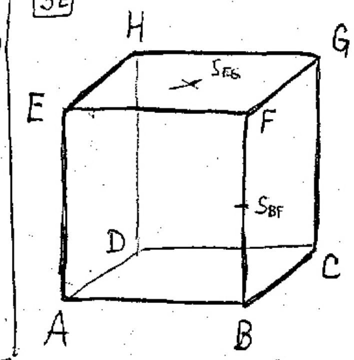
2C)



2D)



5E)



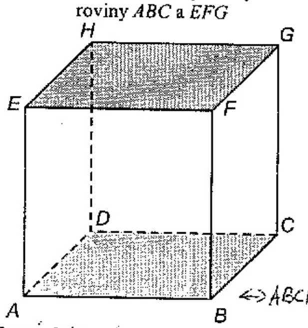
[výsledky: A) RŮZN. B) ROVN C) LEŽÍ V NÍ D) ROVN. E) ROVN.]
$S_{EG}S_{BF} \parallel BK$ → STŘ. PŘ.

Vzájemná poloha rovin

Př. 1: Kolik společných bodů mohou mít dvě roviny? Každou možnost dokumentuj pomocí dvou rovin určených vrcholy krychle a urči vzájemnou polohu rovin.

Mohou nastat tři možnosti:

roviny nemají žádný společný bod
roviny ABC a EFG



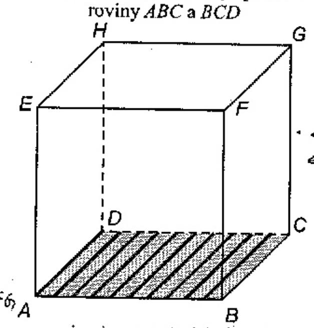
$\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{EFG} = \emptyset$

$\overleftrightarrow{ABC} \parallel \overleftrightarrow{EFG}$

ROVNOBĚŽNÉ RŮZNÉ

roviny jsou **rovnoběžné**

roviny mají všechny body společné
roviny ABC a BCD

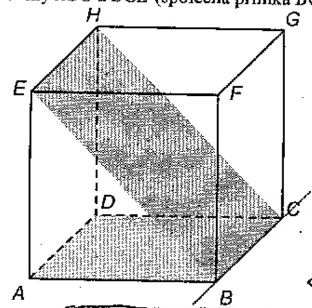


$\overleftrightarrow{ABC} \parallel \overleftrightarrow{BCD}$

$\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{BCD} = \overleftrightarrow{ABC}$

roviny jsou totožné (splývají)

roviny mají společných nekonečně mnoho bodů ležících v přímce
roviny ABC a BCE (společná přímka BC)

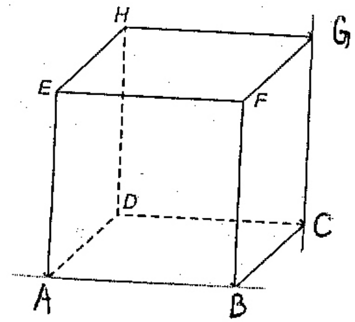


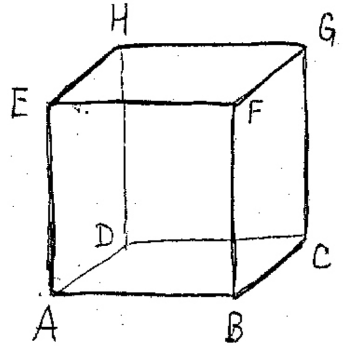
$\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{BCE}$
$\overleftrightarrow{BC}$

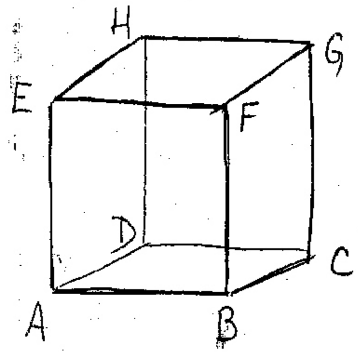
roviny jsou **různoběžné**

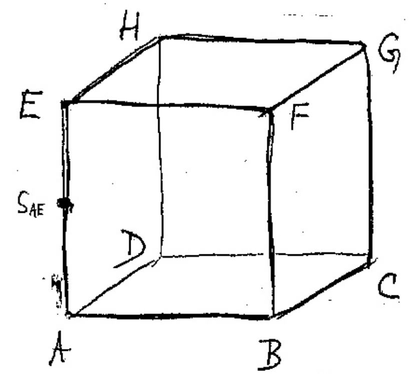
⇒ pokud mají dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči vzájemnou polohu rovin:
a) ABE, CDF b) ABE, DCG c) ABG, DCE d) ABC, $S_{AE}GH$.
Pokud jsou roviny různoběžné, urči jejich průsečnici.









Vzájemná poloha rovin —> Př.

6

Urči vzájemnou polohu rovin ρ a σ pokud víš, že mají:
(a) jeden společný bod (b) společnou přímku
(c) společné tři body, které neleží na přímce

a) jeden společný bod
$\Rightarrow$ roviny mají určitě společnou přímku $\Rightarrow$ roviny jsou různoběžné nebo totožné

b) společnou přímku
$\Rightarrow$ roviny jsou různoběžné nebo totožné

c) společné tři body, které neleží na přímce
roviny jsou totožné

Podobně jako pro přímky i pro roviny platí:
Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Př. 5: Doplň větu: „Je-li $\rho \parallel \sigma$ a $\sigma \parallel \tau$, pak ....“

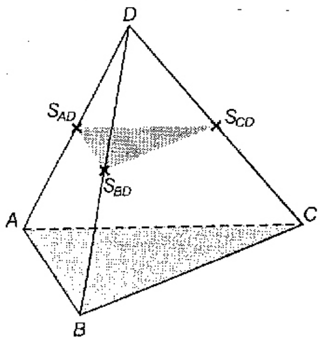
Je-li $\rho \parallel \sigma$ a $\sigma \parallel \tau$, pak $\rho \parallel \tau$. $\Rightarrow$ **i rovnoběžnost rovin je tranzitivní.**

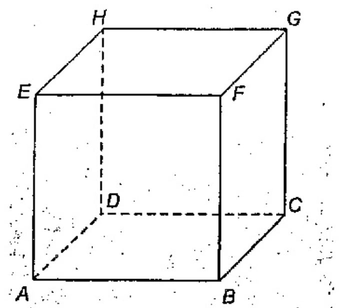
kritérium pro rovnoběžnost dvou rovin.

Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou.
Například pro roviny ρ a σ to znamená, že rovina σ obsahuje přímky p, q, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ.

!

Př. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Dokaž, že rovina $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ je rovnoběžná s rovinou ABC.



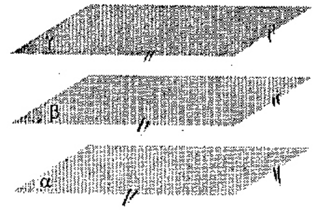


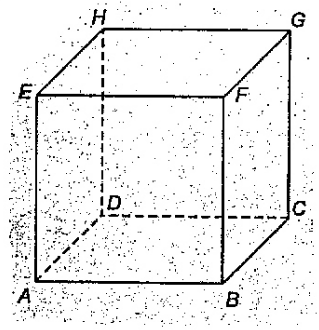
Př. 10: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Bodem B veď rovinu rovnoběžnou s rovinou ACH.

[Výsledek př. 10 : <-> BEG]

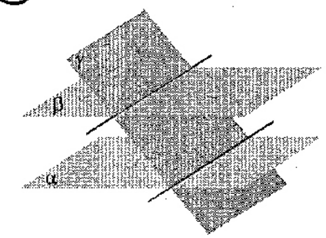
Př. 11: Existuje celkem pět možností pro vzájemnou polohu tří rovin α, β, γ. Najdi všechny tyto možnosti, modeluj je v dvojici pomocí sešitů a demonstruj je pomocí tří rovin určených vrcholy nebo středy hran standardní krychle $ABCDEFGH$.

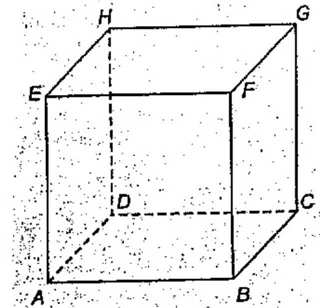
1. **tři navzájem rovnoběžné roviny** —> VYZNAČ



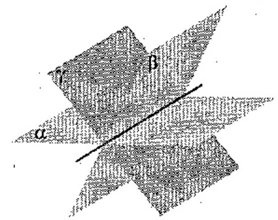


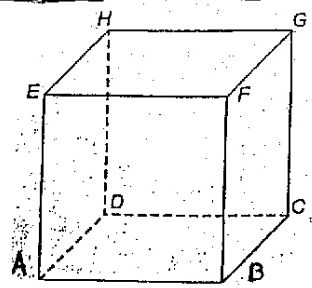
2. **dvě rovnoběžné roviny, třetí je protíná v rovnoběžných přímkách**



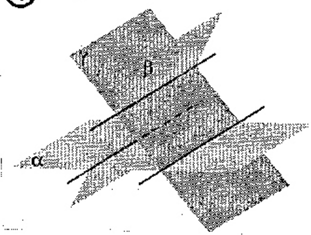


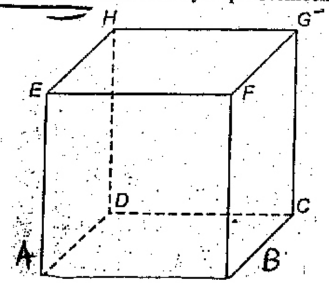
3. **tři navzájem různoběžné roviny se společnou průsečnicí**



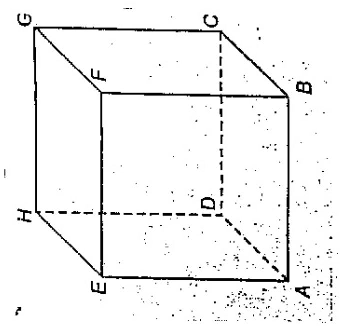


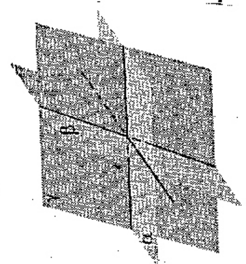
4. **tři navzájem různoběžné roviny se třemi rovnoběžnými průsečnicemi**





5. **tři navzájem různoběžné roviny se třemi průsečnicemi, které procházejí jedním bodem**



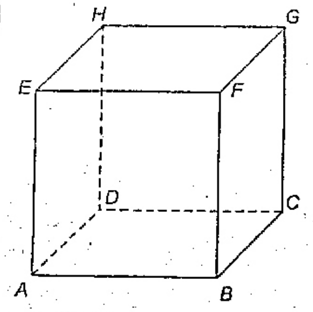


POLOHA ROVIN → ÚKOLY

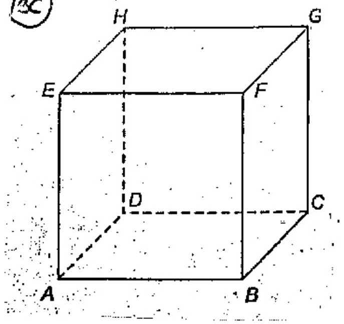
3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze daných dvou rovin:

a) BFS_{AC}, HFS_{EH}
b) AFH, BDG
c) EFG, BCS_{AE}
d) ABS_{DH}, $S_{AB}S_{CG}S_{CH}$

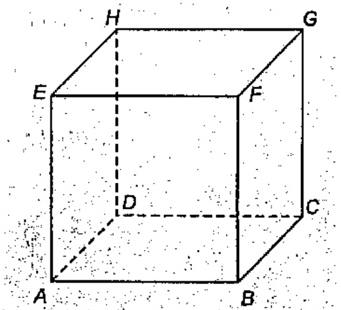
3a



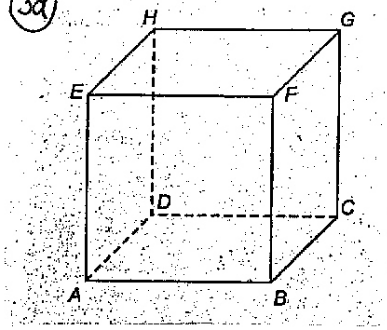
3c



3b



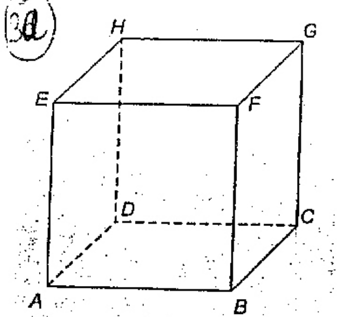
3d



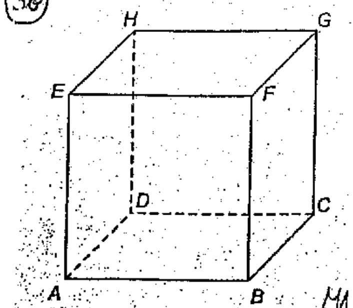
4 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin:

a) ECG, BDF, ABH
b) BCE, ADF, $S_{AE}S_{CG}S_{AF}$
c) ADE, BCS_{EF}, $S_{AF}S_{CG}S_{BF}$
d) AGH, $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$, $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$

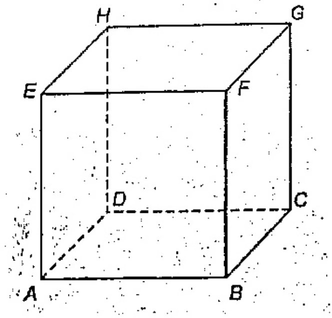
4a



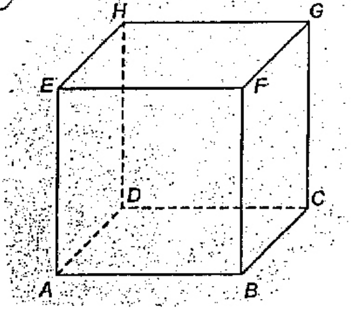
4b



3c



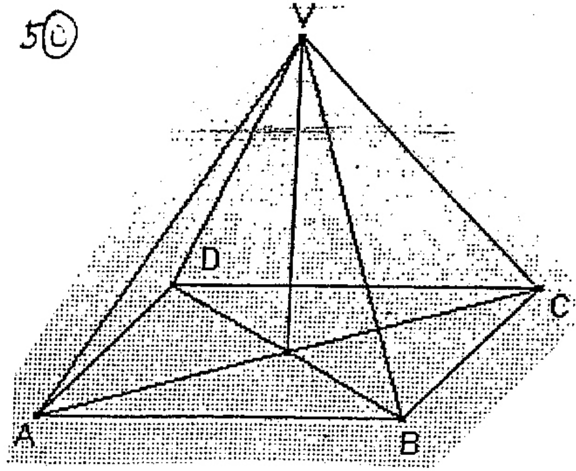
3d



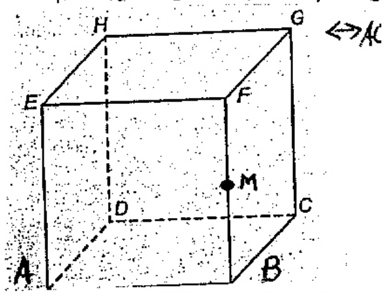
5 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Vyšetřete vzájemnou polohu:

c) dvou rovin BVS_{AD}, $DS_{BC}S_{CV}$
d) tří rovin ACV, BDV, $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$

5c



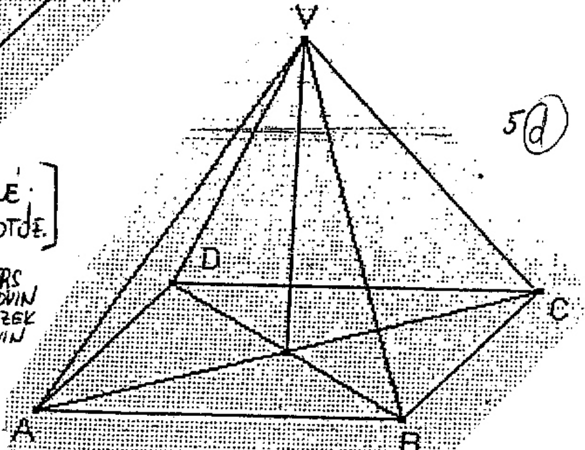
6 BODEM $M = S_{BF}$ KRYCH…
A–H. VEDTE ROVINU ∥ S…
⟷ A…



Výsledky: 3a, 3c RŮZN.; 3b ROVN. RŮZNÉ; 3d SHODNÉ = TOTOŽ.

4a SPOLEČNÝ BOD (STŘED KRYCHLE) TRS ROVIN
4b SPOLEČNÁ PŘÍMKA $S_{BE}S_{CH}$; SVAZEK ROVIN
4c RŮZN. ROV. BEZ SP. BODU; PRŮSEČNICE NAVZ. ∥
4d 2 ROV. ROVINY PROTÍNÁ 3. ROV
5c RŮZNÉ ROVN. ROVINY; 5d TRS → 1 SPOL. BOD

5d



6 ⟷ $S_{EF}S_{FG}M$