Analytická geometrie v prostoru – opakování před závěrečnou písemnou prací

4.1 Sestavte parametrické rovnice přímky p,

a) je-li určena bodem $A[3,-1,2]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{s}=(4,-1,0)$,

b) je-li určena body $A[2,0,1]$, $B[7,1,-1]$,

c) jestliže prochází bodem $M[2,-1,3]$ a je rovnoběžná s přímkou $q\colon x=1-2s,\ y=3+s,\ z=3s;\ s\in\mathsf{R}$.

4.2 Je dána přímka $p\colon x=2-t,\ y=-1+2t,\ z=t;\ t\in\mathsf{R}$; a body $A[0,1,2]$, $B[-1,5,3]$, $C[4,c_2,c_3]$.

a) Rozhodněte, který z bodů A, B leží na přímce p.

b) Určete c_2, c_3 tak, aby $C\in p$.

c) Určete bod $D\in p$, jemuž přísluší hodnota parametru $t=-1$.

4.3 Určete vzájemnou polohu přímky $p\colon x=3+4t,\ y=14-2t,\ z=1+t;\ t\in\mathsf{R}$; a přímky:

a) $a\colon x=-1-8s,\ y=16+4s,\ z=-2s;\ s\in\mathsf{R}$

b) $b\colon x=1-8s,\ y=2+4s,\ z=3-2s;\ s\in\mathsf{R}$

c) $c\colon x=7+4s,\ y=4s,\ z=2s;\ s\in\mathsf{R}$

d) $d\colon x=7-4s,\ y=4s,\ z=2s;\ s\in\mathsf{R}$

e) $e=\leftrightarrow AB$, kde $A[1,-1,2]$, $B[-3,33,-2]$

Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.

4.4 Určete odchylku přímek a, b:

a) $a\colon x=-2+3t,\ y=1,\ z=3-t;\ t\in\mathsf{R}$
$b\colon x=-1+2s,\ y=0,\ z=-3+s;\ s\in\mathsf{R}$

b) $a\colon x=2+3t,\ y=-4t,\ z=12t;\ t\in\mathsf{R}$
$b=\leftrightarrow AB$, kde $A[0,-3,-1]$, $B[1,-6,0]$

c) $a\colon x=1-t,\ y=2+2t,\ z=t;\ t\in\mathsf{R}$
b splývá se souřadnicovou osou z

d) $a\colon x=t,\ y=1+t,\ z=t;\ t\in\mathsf{R}$
$b\colon x=1+s,\ y=-s,\ z=1;\ s\in\mathsf{R}$

e) $a\colon x=-2t,\ y=1-2t,\ z=-4+t;\ t\in\mathsf{R}$
$b=\leftrightarrow AB$, kde $A[1,-1,2]$, $B[3,1,1]$

5.1 Napište obecnou rovnici roviny, která

a) prochází bodem $M[3,-2,0]$ a má normálový vektor $\boldsymbol{n}=(-1,2,3)$,

b) je rovnoběžná s rovinou $\sigma\colon 2x-y+z-1=0$ a prochází bodem $A[-3,1,2]$,

c) prochází bodem $M[0,1,0]$ a je kolmá k přímce $p\colon x=3+3t,\ y=-1-2t,\ z=2;\ t\in\mathsf{R}$,

d) je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem; $A[1,2,3]$, $B[3,-2,-5]$.

5.2 Jsou dány body A, B, C. Rozhodněte, je-li jimi jednoznačně určena rovina, a v kladném případě sestavte její obecnou rovnici:

a) $A[5,-3,1]$, $B[1,3,2]$, $C[-1,-2,0]$

b) $A[1,-1,3]$, $B[2,3,5]$, $C[3,7,7]$

c) $A[0,1,3]$, $B[2,0,-1]$, $C[1,-2,0]$

5.3 a) Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny určené body: $A[-1,2,0]$, $B[2,1,3]$, $C[0,3,-2]$

b) Napište obecné rovnice rovin:
$\varrho=\{[1-t+s,2+2t,-1-s];\ t\in\mathsf{R},\ s\in\mathsf{R}\}$
$\sigma=\{[2+t+s,-7,-1+s];\ t\in\mathsf{R},\ s\in\mathsf{R}\}$

5.4 Je dána přímka p a bod A. Ověřte, že je jimi jednoznačně určena rovina, a pak sestavte její obecnou rovnici:

a) $A[-1,5,1]$; $p\colon x=2-t,\ y=1+t,\ z=-1;\ t\in\mathsf{R}$

b) $A[-1,0,1]$, p splývá se souřadnicovou osou y

5.5 Ověřte, že přímkami $a=\leftrightarrow MN$, kde $M[2,3,-1]$, $N[1,4,-3]$, a $b=\{[1+t,-1-t,2+2t];\ t\in\mathsf{R}\}$ je jednoznačně určena rovina, a sestavte její obecnou rovnici.

5.6 Určete obecnou rovnici roviny ϱ, která je rovnoběžná se souřadnicovou osou x a prochází body $A[-1,0,1]$, $B[2,3,0]$.

5.7 Je dána rovina $\varrho\colon 3x-y+z-1=0$ a body $A[-1,2,7]$, $B[1,0,3]$, $C[2,0,0]$, $D[0,1,2]$. Určete,

a) který z těchto bodů leží v rovině ϱ,

b) které ze zbývajících bodů leží uvnitř téhož poloprostoru s hraniční rovinou ϱ jako počátek soustavy souřadnic.

6.1 Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ:

a) $p\colon x = t,\ y = t,\ z = 1 + 3t;\ t \in \mathsf{R};\quad \varrho\colon 2x + y - z + 1 = 0$

b) $p\colon x = 2 + t,\ y = 1 + 2t,\ z = 3 - t;\ t \in \mathsf{R};\quad \varrho\colon 3x - y + z + 1 = 0$

c) $p\colon x = 1 - t,\ y = 2 + 3t,\ z = 1;\ t \in \mathsf{R};\quad \varrho\colon 2x - y + z - 2 = 0$

d) $p = \leftrightarrow AB$, kde $A[8,-6,0]$, $B[12,-9,1]$; $\varrho\colon 3x - 5y - z - 2 = 0$

Je-li přímka p s rovinou ϱ různoběžná, určete souřadnice jejich průsečíku.

6.2 Určete odchylku přímky p a roviny ϱ v zadání z úlohy 6.1.

6.3 Určete souřadnice paty P kolmice vedené bodem $A[2,0,3]$ k rovině $\varrho\colon x - 3y + 5z + 18 = 0$.

6.4 Je dána přímka $p = \{[t, 1-t, 2t];\ t \in \mathsf{R}\}$ a bod $M[1,0,5]$. Určete společný bod přímky p a roviny ϱ, která prochází bodem M a je kolmá k přímce p.

7.1 Určete vzdálenost bodu M od roviny ϱ, je-li:

a) $M[-7,0,-1]$, $\varrho\colon 4x + 12y - 3z - 1 = 0$

b) $M[-7,3,-1]$, $\varrho = \leftrightarrow ABC$, kde $A[1,0,1]$, $B[2,2,1]$, $C[0,0,2]$

7.2 Určete hodnotu parametru d tak, aby vzdálenost bodu $A[0,0,3]$ od roviny $\varrho\colon 2x - 2y + z + d = 0$ byla $v = 5$.

7.3 Zvolte vhodně soustavu souřadnic a určete vzdálenost bodu F od roviny BEG procházející

a) vrcholy krychle $ABCDEFGH$, jejíž hrana má délku $a = 1\,\mathrm{cm}$,

b) vrcholy kvádru $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|AE| = 5\,\mathrm{cm}$.

7.4 Určete vzdálenost bodu M od přímky p, je-li:

a) $M[0,1,-4]$; $p = \{[2+t, 3, 2-t];\ t \in \mathsf{R}\}$

b) $M[1,0,5]$; $p = \leftrightarrow AB$, kde $A[0,1,0]$, $B[1,0,2]$

7.5 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 1\,\mathrm{cm}$, bod M je středem její hrany GH. Zvolte vhodně soustavu souřadnic a určete vzdálenost vrcholu A krychle od přímky BM.

8.1 Určete vzájemnou polohu rovin:

a) $\varrho\colon 2x - y - z - 1 = 0,\quad \sigma\colon -4x + 2y + 2z + 2 = 0$

b) $\varrho\colon 2x - y - z - 1 = 0,\quad \sigma\colon 4x - 2y - 2z + 1 = 0$

c) $\varrho\colon 2x - y - z - 1 = 0,\quad \sigma\colon x + y + 2z - 3 = 0$

d) $\varrho\colon 20x + 10y + 2z + 3 = 0,\quad \sigma = \{[2+t, -t+2s, 3-5t-10s];\ t, s \in \mathsf{R}\}$

e) $\varrho\colon 2x - y + z - 9 = 0,\quad \sigma = \leftrightarrow ABC$, kde $A[0,0,3]$, $B[-3,0,0]$, $C[0,-3,0]$

8.2 Určete parametrické rovnice průsečnice rovin ϱ, σ:

a) $\varrho\colon 2x - y - z - 1 = 0,\quad \sigma\colon x + y + 2z - 3 = 0$

b) $\varrho\colon x + y - z + 3 = 0,\quad \sigma\colon 2x - y + z - 9 = 0$

c) $\varrho\colon x - y + z - 1 = 0,\quad \sigma = \leftrightarrow ABC$, kde $A[0,0,1]$, $B[1,0,0]$, $C[0,1,0]$

8.3 Určete odchylku rovin ϱ, σ:

a) $\varrho\colon x - y + 2z - 1 = 0,\quad \sigma\colon 2x + y + z + 5 = 0$

b) $\varrho\colon 2x - 2y - 7 = 0,\quad \sigma = \leftrightarrow KLM$, kde $K[2,-3,2]$, $L[0,-1,0]$, $M[1,3,-4]$

c) $\varrho\colon x - 2y + 2z = 0,\quad \sigma = \{[1-t-s, t, s];\ t, s \in \mathsf{R}\}$

d) $\varrho\colon x + y + 5 = 0$; σ je souřadnicová rovina yz

e) $\varrho\colon x - 2y + 3z = 0,\quad \sigma\colon 3x - z + 1 = 0$

f) $\varrho\colon x - 2y + 3z - 6 = 0,\quad \sigma = \leftrightarrow ABC$, kde $A[0,0,2]$, $B[6,0,0]$, $C[0,-3,0]$

8.4 Jsou dány roviny ϱ, σ, τ. Určete jejich průnik, počet průsečnic a jejich vzájemnou polohu:

a) $\varrho\colon x+2y+3z-4 = 0,\quad \sigma\colon 2x+3y+4z-5 = 0,\quad \tau\colon 3x+4y+5z-6 = 0$

b) $\varrho\colon x+2y-5z-15 = 0,\quad \sigma\colon 3x+5y+2z-9 = 0,\quad \tau\colon 3x+y-z-7 = 0$

c) $\varrho\colon x+y+z-3 = 0,\quad \sigma\colon x+y+z+4 = 0,\quad \tau\colon 2x+2y+2z-10 = 0$

d) $\varrho\colon x + y + z + 1 = 0,\quad \sigma\colon 2x - y + z = 0,\quad \tau\colon x + y + z - 1 = 0$

e) $\varrho\colon x - 3z + 10 = 0,\quad \sigma\colon 5x - 6y - 7 = 0,\quad \tau\colon 2y - 5z - 8 = 0$

Výsledky:

4.1 a) $p\colon x = 3+4t,\ y = -1-t,\ z = 2;\ t \in \mathsf{R}$; b) $p\colon x = 2+5t,\ y = t,\ z = 1-2t;\ t \in \mathsf{R}$; c) $p\colon x = 2-2t,\ y = -1+t,\ z = 3+3t;\ t \in \mathsf{R}$. **4.2** a) $B \in p$; b) $c_2 = -5,\ c_3 = -2$; c) $D[3,-3,-1]$. **4.3** a) $p = a$; b) různé rovnoběžky; c) různoběžky, $P[15,8,4]$; d) mimoběžky; e) různoběžky, $P[-1,16,0]$. **4.4** a) $45°$; b) $\cos\alpha = \dfrac{27}{13\cdot\sqrt{11}}$, $\alpha \doteq 51°14'$; c) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\alpha \doteq 65°54'$; d) $90°$; e) $0°$.

5.1 a) $x-2y-3z-7=0$; b) $2x-y+z+5=0$; c) $3x-2y+2=0$; d) $x-2y-4z-6=0$. **5.2** a) $7x+10y-32z+27=0$; b) A, B, C jsou kolineární – rovina není jednoznačně určena; c) $9x-2y+5z-13=0$. **5.3** a) $\varrho = \{[-1+3t+s, 2-t+s, 3t-2s];\ t \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R}\}$, $\varrho\colon x-9y-4z+19=0$; b) $\varrho\colon 2x+y+2z-2=0$, $\sigma\colon y+7=0$. **5.4** a) $2x+2y-z-7=0$; b) $x+z=0$. **5.5** Přímky jsou rovnoběžné, $\varrho\colon x-y-z=0$. **5.6** $\varrho\colon y+3z-3=0$. **5.7** a) Bod D; b) žádný.

6.1 a) $p \subset \varrho$; b) $p \parallel \varrho$, $p \cap \varrho = \emptyset$; c) $p \nparallel \varrho$, $P\left[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, 1\right]$; d) $p \nparallel \varrho$, $P[0,0,-2]$.
6.2 a) $0°$; b) $0°$; c) $\sin\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}$, $\alpha \doteq 40°12'$; d) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{35}}{35}$, $\alpha \doteq 59°32'$.
6.3 $P[1,3,-2]$. **6.4** $P[2,-1,4]$.

7.1 a) $v = 2$; b) $v = \frac{23}{3}$. **7.2** $d = 12$ nebo $d = -18$. **7.3** a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\left(\frac{1}{3}|DF|\right)$; b) $\dfrac{60}{\sqrt{769}}\,\mathrm{cm} \doteq 2{,}16\,\mathrm{cm}$. **7.4** a) $v = 6$; b) $v = \sqrt{3}$. **7.5** $v = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

8.1 a) $\varrho = \sigma$; b) $\varrho \parallel \sigma$, $\varrho \cap \sigma = \emptyset$; c) $\varrho \nparallel \sigma$; d) $\varrho \parallel \sigma$, $\varrho \cap \sigma = \emptyset$; e) $\varrho \nparallel \sigma$.
8.2 a) Např.: $p = \{[t, -5+5t, 4-3t];\ t \in \mathsf{R}\}$; b) např.: $p = \{[2, -5+t, t];\ t \in \mathsf{R}\}$; c) např.: $p = \{[t, 0, 1-t];\ t \in \mathsf{R}\}$. **8.3** a) $60°$; b) $60°$; c) asi $78°54'$; d) $45°$; e) $90°$; f) $0°$ $(\varrho = \sigma)$. **8.4** a) $\varrho\cap\sigma\cap\tau = p = \{[-2+t, 3-2t, t];\ t \in \mathsf{R}\}$ – 3 splývající průsečnice; b) $\varrho \cap \sigma \cap \tau = \{P[1,2,-2]\}$ – 3 průsečnice se společným bodem P; c) $\varrho \cap \sigma \cap \tau = \emptyset$ – žádná průsečnice; d) $\varrho \cap \sigma \cap \tau = \emptyset$ – 2 rovnoběžné průsečnice; e) $\varrho \cap \sigma \cap \tau = \emptyset$ – 3 rovnoběžné průsečnice.