

Posloupnosti - příklady k procvičování

1. Určete k -tý člen posloupnosti:

a) $a_n = n \cdot 2^{-n}$; $k = 4$

[$a_4 = 1/4$]

b) $a_1 = -3$; $a_2 = -1$; $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$; $k = 5$

[$a_5 = 5$]

2. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí, které klesající a které nejsou ani rostoucí ani klesající:

a) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

[je rostoucí, protože $a_n < a_{n+1}$]

b) $\left(\frac{2}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

[je klesající, protože $a_n > a_{n+1}$]

c) $(n^2 - 10n + 1)_{n=1}^{\infty}$

[není ani rostoucí, ani klesající]

3. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou omezené shora, omezené zdola omezené. Svě tvrzení dokažte.

a) $(n^2 - 1)_{n=1}^{\infty}$

[omezená zdola, $a_n \geq 0$]

b) $\left(\frac{-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

[omezená, $-1 \leq a_n < 0$]

c) $\left(\frac{5n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

[omezená $\frac{7}{2} \leq a_n < 5$]

d) $\left(\frac{n+4}{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

[omezená; $-5 \leq a_n < -1$]

4. Zjistěte, zda jsou zadané posloupnosti aritmetické, a pokud ano, určete jejich první člen a diferencí.

a) $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$

[je aritmetická; je třeba ověřit, že rozdíl $a_{n+1} - a_n = d$ je nezávislý na n .]

b) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

[není aritmetická]

5. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 64$ a $d = 4$. Kolikátý člen je roven číslu **100**? [$n=10$]

6. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 5$ a $d = 3$ určete, kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než **100**? [alespoň 8]

7. Určete první člen a diferencí aritmetické posloupnosti, ve které platí: $a_1 + a_3 = 2$, $a_2 + a_7 = -8$. [$a_1=3$; $d=-2$]

8. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod tohoto trojúhelníku je **96** cm. Vypočítejte délky stran. [24;32;40]

9. Řešte rovnici a nerovnici s neznámou $x \in \mathbb{N}$.

a) $4 + 6 + 8 + \dots + x = 270$

[32]

b) $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 3x \geq 999$

[26,27,28,...]

10. Zjistěte, zda jsou zadané posloupnosti geometrické, a pokud ano, určete jejich první člen a kvocient.

a) $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ [je geometrická; $a_1 = 2/9$; $q = 2/3$; je třeba ověřit, že a_{n+1}/a_n je nezávislý na n]

b) $\left(\frac{5n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ [není geometrická]

11. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí: $a_2 = 16$; $a_4 = 1$. [$a_1 = 64$, $q = 1/4$ nebo $a_1 = -64$, $q = -1/4$]

12. V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 36$ určete kvocient tak, aby platilo:

$s_3 \leq 252$. [$q \in \langle -3; 2 \rangle$]

13. Za pět let se počet obyvatel ve městě X zvýšil o 12%. Jaký byl roční přírůstek obyvatel? [asi 2,3%]

14. Počátkem roku uložil pan Novák do banky 50 000 Kč. Vklad je úročen 8% ročně.

a) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za rok (daň z úroku neuvažujte) [54 000 Kč]

b) Kolik korun bude mít k dispozici za rok, bude-li mu odečtena daň z úroku 15%? [53 400 Kč]

c) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech? (Daň z úroku neuvažujte). [68 024,40 Kč]

d) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech, bude-li mu na konci každého roku odečtena daň z úroků ve výši 15%? [65 051,20 Kč]

15. Kolik peněz musí pan Dvořák uložit, aby při ročním úročení 8,5% měl za pět let 25 000 Kč? (Daň z úroků je 15%). [17 638,40 Kč]

16. Kuřák prokouří ročně 1 200 Kč. Kolik by uspořil za 50 let, kdyby tuto částku vždy počátkem roku ukládal na vkladní knížku při ročním úročení 8%? (Daň z úroků počítejte 15%). [486 752 Kč]

17. Pan Starý si vzal půjčku 300 000 Kč na roční úrok 14%. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li pan Starý splatit dluh za pět let? [87 385,10 Kč]