

Analytická geometrie - opakování před čtvrtletní písemnou prací

1. Určete bod C tak, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý, rovnoramenný s přeponou AB, kde $A[4;-6]$, $B[-2;10]$.
2. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB, $A[-3;4]$, $B[1;6]$, leží vrchol C na přímce $5x - 6y - 16 = 0$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C.
3. Jsou dány body $A[6\sqrt{3}; 0]$, $B[0; 2\sqrt{3}]$. Určete souřadnice bodu C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnostranný.
4. Najděte souřadnice vrcholů B, C rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, víte-li, že vrchol A má souřadnice $[3;-2]$, vrchol C leží na ose x , dále víte, že osa úhlu γ má rovnici $2x + y + 6 = 0$.
5. Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, jestliže znáte obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice $t_a: 4x + 3y + 5 = 0$, těžiště $T[4;-7]$ a $S_{AB}[1;2]$.
6. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek, na nichž leží strany $b: 3x + 4y - 1 = 0$, $c: x - y + 2 = 0$ a výšky $v_c = 14\sqrt{2}$, $v_b = 7$.
7. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-1;-2]$ a obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice $t_b: x + 2y - 1 = 0$, $t_c: y - 4 = 0$.
8. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $C[-2;6]$ a obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky $v_a: 4x - y + 3 = 0$, $v_b: 2x + 3y + 1 = 0$.
9. V trojúhelníku ABC znáte souřadnice vrcholů $A[-5;1]$, $B[4;-2]$ a souřadnice průsečíku výšek $V[3;-3]$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C.
10. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2;4]$ a obecnou rovnici výšky $v_c: 2x + y = 0$ a těžnice $t_c: x + y + 3 = 0$.
11. Body $S_{AB}[3;4]$, $S_{BC}[5;-3]$, $S_{AC}[-3;5]$ jsou středy stran daného trojúhelníku ABC. Vypočítejte souřadnice vrcholů A, B, C.
12. Vrchol C trojúhelníku ABC leží na přímce $x - 2y + 8 = 0$. Určete jeho souřadnice, znáte-li vrcholy $A[-2;1]$, $B[4;8]$ a víte-li, že obsah trojúhelníku ABC je 10.
13. Vypočítejte souřadnice vrcholů a napište rovnice přímek, na nichž leží strany rovnostranného trojúhelníku, jestliže jedna strana splývá s osou y a jeden z vrcholů má souřadnice $[8;0]$.
14. Dokažte, že body $A[3;0]$, $B[6;4]$, $C[4;5]$, $D[1;1]$ tvoří rovnoběžník. Vypočítejte jeho vnitřní úhly a úhel úhlopříček.
15. Vypočítejte souřadnice vrcholů B, D rovnoběžníku ABCD, znáte-li souřadnice vrcholů $A[4;0]$, $C[0;-2]$ a víte-li, že strana AB je rovnoběžná s osou II. a IV. kvadrantu. Délka strany BC je $3\sqrt{2}$.
16. Body ABCD tvoří rovnoběžník. Vypočítejte souřadnice bodů C, D, znáte-li vrcholy $A[2;-4]$, $B[3;-2]$ a délky úhlopříček $|AC| = 2\sqrt{5}$, $|BD| = 4$.
17. Přímka $3x + y - 10 = 0$ je osou základny AB rovnoramenného lichoběžníku ABCD, $B[4;8]$, $C[6;12]$. Vypočítejte souřadnice vrcholů A, D.
18. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li body $A[-1;-3]$, $B[2;1]$.
19. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li souřadnice bodů $A[6;3]$, $S[1;7]$, kde bod S je střed čtverce.
20. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li body $A[3;2]$, $C[-5;4]$.
21. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li souřadnice bodů $A[5;-6]$, $S_{AB}[7;1]$.
22. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li $S_{AB}[0;-3]$, $S_{CD}[2;5]$.
23. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li $S_{AB}[4;1]$, $S_{BC}[9;0]$.
24. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li $A[-3;-2]$, $S_{BC}[2; \frac{1}{2}]$.
25. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li bod $B[4;-8]$ a rovnici přímky $p: x - 2y = 0$, na které leží úhlopříčka AC.
26. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li délku strany $|AB| = 2\sqrt{10}$ a rovnice přímek $p: x - 2y + 1 = 0$, $q: 2x + y - 3 = 0$, na kterých leží úhlopříčky AC, BD.
27. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, víte-li, že jeden vrchol čtverce je v počátku soustavy souřadnic a úhlopříčky čtverce leží na daných přímkách $p_1: x + 2y + 5 = 0$, $p_2: 2x - y = 0$.
28. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li souřadnice středu čtverce $S[2;-6]$ a rovnici přímky $p: 5x - y + 10 = 0$, na které leží strana AB.
29. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, jestliže $S_{AC}[8;0]$ a jestliže znáte rovnici přímky $p: 4x + 3y + 18 = 0$, na které leží strana BC.
30. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, tak, aby vrchol A ležel na přímce $a: 2x - y + 1 = 0$ a vrchol C ležel na přímce $c: x + 5y - 12 = 0$. Střed S čtverce je $S[-2;1]$.

31. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li vrchol A[4;-7] víte-li, že vrcholy B, C leží na přímce $p: x-2y-10=0$.
32. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li vrchol A[-6;6] víte-li, že vrcholy B, D leží na přímce $q: x-2y+8=0$.
33. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD, znáte-li body B[2;2], D[11;4] víte-li, že vrchol A leží na přímce $x+2y-10=0$.
34. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD, znáte-li body A[2;0], B[-6;2] víte-li, že střed obdélníku S leží na přímce $6x-y+10=0$.
35. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD, znáte-li body A[-4;6], C[0;8] a víte-li, že pro strany obdélníku platí $|AB|=2|BC|$.

Další typy příkladů:

1. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku s vrcholy A[3,-6,5], B[4,8,1], C[5,22,-3]
2. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku s vrcholy A[4,0,-1], B[2,4,-1], C[5,3,4]
3. Vypočítejte vnitřní úhel $\angle TRS$ trojúhelníku RST, jsou-li souřadnice vrcholů R[4;1;0], S[4;-2;-3], T[1;-2;0].
4. Jsou dány body R[3; -2], S[-4; 5], T[2; 1]. Urči souřadnice bodu X tak, aby čtyřúhelník RSTX byl rovnoběžník a urči jeho obsah.
5. Body A[2;4], B[4;2], C[4;1] jsou vrcholy trojúhelníku ABC.
 - a) Napište obecné rovnice os všech jeho stran. Potom vypočtete souřadnice jejich průsečíku.
 - b) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice t_a, t_b, t_c . Potom vypočtete souřadnice těžiště.
 - c) Napište obecné rovnice výšek v_a, v_b, v_c . Potom vypočtete souřadnice průsečíku výšek.
6. Je dán trojúhelník ABC, A[0;0], B[-4;2], C[-6;0]. Vypočítejte souřadnice průsečíku výšek V, souřadnice těžiště T a souřadnice středu S kružnice trojúhelníku ABC opsané. Dokažte, že body V, T, S leží na jedné přímce.
7. Napište rovnici přímky AB, A[5;-2], B[2;-3] v úsekovém tvaru. Vypočítejte souřadnice průsečíků přímky AB s osami souřadnic. Vypočítej obsah trojúhelníku, který vymezuje daná přímka spolu s osami x a y .
8. Určete obecnou rovnici přímky p tak, aby procházela bodem M[1;4] a spolu s osami x, y určovala trojúhelník o obsahu 1.
9. Rozhodněte, zda přímka $p: 2x + 3y - 12=0$ protíná úsečku AB, A[2;3], B[5;-1].
10. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbf{R}$ tak, aby bod P[-4;p+3] ležel v polorovině $y \geq 2x$.
11. Je dána přímka $p: 3x - 2y + 6 = 0$. Určete hodnoty parametrů $a, c \in \mathbf{R}$ tak, aby přímka $q: ax - 5y + c = 0$ byla s přímkou p rovnoběžná a procházela bodem M[5;3].
12. Napište obecnou rovnici přímky p , která prochází bodem M[4;6]. Dva dané body A[-6;10], B[10;-6] mají od p stejnou vzdálenost.
13. V trojúhelníku ABC, A[-3;4], B[-1;-2], C[3;6] vypočítejte:

a) výšky v_a, v_b, v_c	c) délku střední příčky
b) těžnice t_a, t_b, t_c	d) obvod a obsah ΔABC
14. Jsou dány body A[2;2;3], B[6;3;0], C[3,-1,-1]
 - a) Dále je dán bod D[0;0;0]. Vypočítejte objem čtyřstěnu ABCD.
 - b) Na ose x určete bod X tak, aby objem čtyřstěnu ABCX byl 26.
15. V rovnoběžnostěnu ABCDA₁B₁C₁D₁ známe souřadnice bodů A[1; 0; 2], B[3; 4; 3], D[-1; 4; -6], A₁[2; 1; -5].
 - a) Vypočítej souřadnice vrcholů C, B₁, C₁, D₁.
 - b) Urči objem rovnoběžnostěnu ABCDA₁B₁C₁D₁.
16. Jsou dány vektory $\vec{u}=(3;-1;0)$, $\vec{v}=(9;-3;2)$. Určete souřadnice vektoru \vec{z} tak, aby platilo $\vec{z} \perp \vec{u} \wedge \vec{z} \perp \vec{v} \wedge |\vec{z}|=1$
17. Jsou dány vektory $\vec{a}=(2;4;-1)$, $\vec{b}=(3;1;2)$. Určete hodnotu parametru $p \in \mathbf{R}$ tak, aby pro vektor $\vec{z}=(1;p;2)$ platilo $\vec{a} \times \vec{z} \perp \vec{z} \times \vec{b}$
18. Jsou dány vektory $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$, $\vec{c}=(2;-1;1)$. Určete souřadnice vektoru \vec{x} , který je kolmý k vektoru \vec{a} i k vektoru \vec{b} a přitom $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$
19. Jsou dány vektory $\vec{u}=(2;3;4)$, $\vec{v}=(2;m;0)$. Určete hodnotu parametru $m \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo: $[\vec{u} \times \vec{v}] = 4\sqrt{6}$

Řešení:

1. $C_1[9;5], C_2[-7;-1]$
2. $C[2;-1]$
3. $C_{1,2}[\pm 3 + 3\sqrt{3}; \pm 9 + \sqrt{3}]$
4. $B[-5;-6], C[-3;0]$
5. $A[-2;1], B[4;3], C[10;-25]$
6. $A[-1;1], B_1[-6;-4], B_2[4;6], C_1[15;-11], C_2[-17;13]$
7. $B[-19;10], C[-1;4]$
8. $A[2\frac{2}{5}; 12\frac{3}{5}], B[-14;9]$
9. $C[2;-6]$
10. $B[-10;-2], C[3;-6]$
11. $A[-5;12], B[11;-4], C[-1;-2]$
12. $C_1[6;7], C_2[1; \frac{9}{2}]$
13. $a, b: x \pm \sqrt{3}y - 8 = 0, c: x = 0, A[0; -\frac{8}{3}\sqrt{3}], B[0; \frac{8}{3}\sqrt{3}]$.
14. $\alpha = \gamma = 100^\circ 18', \beta = \delta = 79^\circ 42', \omega = 47^\circ 44'$.
15. $B[3;1], D[1;-3]$.
16. $C_1 = [0;0], D_1 = [-1;-2], C_2[6\frac{2}{5}; -3\frac{1}{5}], D_2 = [5\frac{2}{5}; -5\frac{1}{5}]$.
17. $A[-2;6], D[-6;8]$
18. $C_1[6;-2], D_1[3;-6], C_2[-2;4], D_2[-5;0]$.
19. $B[5;12], C[-4;11], D[-3;2]$.
20. $B[0;7], D[-2;-1]$
21. $B[9;8], C_1[23;4], D_1[19;-10], C_2[-5;12], D_2[-9;-2]$
22. $A[-4;-2], B[4;-4], C[6;4], D[-2;6]$
23. $A_1[2;4], B_1[6;-2], C_1[12;2], D_1[8;8], A_2[1;-1], B_2[7;3], C_2[11;-3], D_2[5;-7]$
24. $B_1[2;-2], C_1[2;3], D_1[-3;3], B_2[0;2], C_2[4;-1], D_2[1;-5]$
25. $A[-8;-4], C[8;4], D[-4;8]$
26. $A[5;3], B[-1;5], C[-3;-1], D[3;-3]$
27. $A[0;0], B[-3;-1], C[-2;-4], D[1;-3]$
28. $A[-2;0], B[-4;-10], C[6;-12], D[8;-2]$
29. $A[10;14], B[-6;2], C[6;-14], D[22;-2]$
30. $A[-1;-1], B[0;2], C[-3;3], D[-4;0]$
31. $C_1[3;-4], B_1[2;-6], D_1[5;-5], C_2[1;-8], B_2[2;-6], D_2[3;-9]$
32. $B[-8;0], C[-2;-2], D[0;4]$
33. $A_1[10;0], C_1[3;6], A_2[2;4], C_2[11;2]$
34. $C[-3;14], D[5;12]$
35. $B_1[0;6], D_1[-4;8], B_2[-\frac{8}{5}; \frac{46}{5}], D_2[-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}]$.

Další typy příkladů:

1. obsah nelze určit, body leží na jedné přímce a tedy nejsou vrcholy trojúhelníku
2. $5\sqrt{6}$
3. 60°
4. $X[9;-6], S = 14$
5. a) $o_{AB}: x-y=0, o_{BC}: y-\frac{3}{2}=0, o_{AC}: 4x-6y+3=0, \Rightarrow S[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$
b) $t_a: 5x+4y-26=0, t_b: x+2y-8=0, t_c: 2x+y-9=0 \Rightarrow T[\frac{10}{3}; \frac{7}{3}]$
c) $v_a: y-4=0, v_b: 2x-3y-2=0, v_c: x-y-3=0 \Rightarrow V[7;4]$.
6. $V[-4;4], T[-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}], S[-3;-1], V, T, S \in p: 5x+y+16=0$.
7. $\frac{x}{11} + \frac{y}{-11} = 1, P_x[11;0], P_y[0; -\frac{11}{3}], S_\Delta = \frac{121}{6}$
8. $p_1: 8x-y-4=0, p_2: 2x-y+2=0$
9. protíná, body A, B leží v opačných polorovinách
10. $p \in \langle -11; \infty \rangle$
11. $a = \frac{15}{2}, c = \frac{-45}{2}$
12. $x+y-10=0, 2x-y-2=0$
13. $v_a=2\sqrt{5}, v_b=2\sqrt{10}, v_c=2\sqrt{10}, t_a=2\sqrt{5}, t_b=5\sqrt{2}, t_c=5\sqrt{2}, s_a=2\sqrt{5}, s_b=\sqrt{10}, s_c=\sqrt{10}$
 $o=4\sqrt{10}+4\sqrt{5}, S_\Delta=20$.
14. a) $\frac{13}{2}$ b) $X_1[\frac{5}{2}; 0], X_2 = [\frac{11}{2}; 0]$
15. $C[1;8;7], B_1[4;5;-4], C_1[2;9;0], D_1[0;5;-1]$ b) $V = 110$.
16. $z_{1,2} = (\frac{\pm\sqrt{10}}{10}; \pm 3\frac{\sqrt{10}}{10}; 0)$
17. $p_1=2, p_2=5$
18. $\vec{x} = (-3; 3; 3)$
19. $m_1 = -1; m_2 = \frac{-1}{5}$