

### Analytická geometrie - opakování před čtvrtletní písemnou prací

1. Určete bod C tak, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý, rovnoramenný s přeponou AB, kde  $A[4;-6]$ ,  $B[-2;10]$ .
2. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB,  $A[-3;4]$ ,  $B[1;6]$ , leží vrchol C na přímce  $5x - 6y - 16 = 0$ . Vypočítejte souřadnice vrcholu C.
3. Jsou dány body  $A[6\sqrt{3}; 0]$ ,  $B[0; 2\sqrt{3}]$ . Určete souřadnice bodu C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnostranný.
4. Najděte souřadnice vrcholů B, C rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, víte-li, že vrchol A má souřadnice  $[3;-2]$ , vrchol C leží na ose  $x$ , dále víte, že osa úhlu  $\gamma$  má rovnici  $2x + y + 6 = 0$ .
5. Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, jestliže znáte obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice  $t_a: 4x + 3y + 5 = 0$ , těžiště  $T[4;-7]$  a  $S_{AB}[1;2]$ .
6. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek, na nichž leží strany  $b: 3x + 4y - 1 = 0$ ,  $c: x - y + 2 = 0$  a výšky  $v_c = 14\sqrt{2}$ ,  $v_b = 7$ .
7. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol  $A[-1;-2]$  a obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice  $t_b: x + 2y - 1 = 0$ ,  $t_c: y - 4 = 0$ .
8. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol  $C[-2;6]$  a obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky  $v_a: 4x - y + 3 = 0$ ,  $v_b: 2x + 3y + 1 = 0$ .
9. V trojúhelníku ABC znáte souřadnice vrcholů  $A[-5;1]$ ,  $B[4;-2]$  a souřadnice průsečíku výšek  $V[3;-3]$ . Vypočítejte souřadnice vrcholu C.
10. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol  $A[2;4]$  a obecnou rovnici výšky  $v_c: 2x + y = 0$  a těžnice  $t_c: x + y + 3 = 0$ .
11. Body  $S_{AB}[3;4]$ ,  $S_{BC}[5;-3]$ ,  $S_{AC}[-3;5]$  jsou středy stran daného trojúhelníku ABC. Vypočítejte souřadnice vrcholů A, B, C.
12. Vrchol C trojúhelníku ABC leží na přímce  $x - 2y + 8 = 0$ . Určete jeho souřadnice, znáte-li vrcholy  $A[-2;1]$ ,  $B[4;8]$  a víte-li, že obsah trojúhelníku ABC je 10.
13. Vypočítejte souřadnice vrcholů a napište rovnice přímek, na nichž leží strany rovnostranného trojúhelníku, jestliže jedna strana splývá s osou  $y$  a jeden z vrcholů má souřadnice  $[8;0]$ .
14. Dokažte, že body  $A[3;0]$ ,  $B[6;4]$ ,  $C[4;5]$ ,  $D[1;1]$  tvoří rovnoběžník. Vypočítejte jeho vnitřní úhly a úhel úhlopříček.
15. Vypočítejte souřadnice vrcholů B, D rovnoběžníku ABCD, znáte-li souřadnice vrcholů  $A[4;0]$ ,  $C[0;-2]$  a víte-li, že strana AB je rovnoběžná s osou II. a IV. kvadrantu. Délka strany BC je  $3\sqrt{2}$ .
16. Body ABCD tvoří rovnoběžník. Vypočítejte souřadnice bodů C, D, znáte-li vrcholy  $A[2;-4]$ ,  $B[3;-2]$  a délky úhlopříček  $|AC| = 2\sqrt{5}$ ,  $|BD| = 4$ .
17. Přímka  $3x + y - 10 = 0$  je osou základny AB rovnoramenného lichoběžníku ABCD,  $B[4;8]$ ,  $C[6;12]$ . Vypočítejte souřadnice vrcholů A, D.
18. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li body  $A[-1;-3]$ ,  $B[2;1]$ .
19. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li souřadnice bodů  $A[6;3]$ ,  $S[1;7]$ , kde bod S je střed čtverce.
20. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li body  $A[3;2]$ ,  $C[-5;4]$ .
21. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li souřadnice bodů  $A[5;-6]$ ,  $S_{AB}[7;1]$ .
22. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li  $S_{AB}[0;-3]$ ,  $S_{CD}[2;5]$ .
23. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li  $S_{AB}[4;1]$ ,  $S_{BC}[9;0]$ .
24. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li  $A[-3;-2]$ ,  $S_{BC}[2; \frac{1}{2}]$ .
25. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li bod  $B[4;-8]$  a rovnici přímky  $p: x - 2y = 0$ , na které leží úhlopříčka AC.
26. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li délku strany  $|AB| = 2\sqrt{10}$  a rovnice přímek  $p: x - 2y + 1 = 0$ ,  $q: 2x + y - 3 = 0$ , na kterých leží úhlopříčky AC, BD.
27. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, víte-li, že jeden vrchol čtverce je v počátku soustavy souřadnic a úhlopříčky čtverce leží na daných přímkách  $p_1: x + 2y + 5 = 0$ ,  $p_2: 2x - y = 0$ .
28. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li souřadnice středu čtverce  $S[2;-6]$  a rovnici přímky  $p: 5x - y + 10 = 0$ , na které leží strana AB.
29. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, jestliže  $S_{AC}[8;0]$  a jestliže znáte rovnici přímky  $p: 4x + 3y + 18 = 0$ , na které leží strana BC.
30. Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce ABCD, tak, aby vrchol A ležel na přímce  $a: 2x - y + 1 = 0$  a vrchol C ležel na přímce  $c: x + 5y - 12 = 0$ . Střed S čtverce je  $S[-2;1]$ .

31. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li vrchol  $A[4;-7]$  víte-li, že vrcholy B, C leží na přímce  $p: x-2y-10=0$ .
32. Určete souřadnice vrcholů čtverce ABCD, znáte-li vrchol  $A[-6;6]$  víte-li, že vrcholy B, D leží na přímce  $q: x-2y+8=0$ .
33. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD, znáte-li body  $B[2;2]$ ,  $D[11;4]$  víte-li, že vrchol A leží na přímce  $x+2y-10=0$ .
34. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD, znáte-li body  $A[2;0]$ ,  $B[-6;2]$  víte-li, že střed obdélníku S leží na přímce  $6x-y+10=0$ .
35. Určete souřadnice vrcholů obdélníku ABCD, znáte-li body  $A[-4;6]$ ,  $C[0;8]$  a víte-li, že pro strany obdélníku platí  $|AB|=2|BC|$ .

Další typy příkladů:

1. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku s vrcholy  $A[3,-6,5]$ ,  $B[4,8,1]$ ,  $C[5,22,-3]$
2. Užitím vektorového součinu vypočítejte obsah trojúhelníku s vrcholy  $A[4,0,-1]$ ,  $B[2,4,-1]$ ,  $C[5,3,4]$
3. Vypočítejte vnitřní úhel  $\angle TRS$  trojúhelníku RST, jsou-li souřadnice vrcholů  $R[4;1;0]$ ,  $S[4;-2;-3]$ ,  $T[1;-2;0]$ .
4. Jsou dány body  $R[3; -2]$ ,  $S[-4; 5]$ ,  $T[2; 1]$ . Urči souřadnice bodu X tak, aby čtyřúhelník RSTX byl rovnoběžník a urči jeho obsah.
5. Body  $A[2;4]$ ,  $B[4;2]$ ,  $C[4;1]$  jsou vrcholy trojúhelníku ABC.
  - a) Napište obecné rovnice os všech jeho stran. Potom vypočtete souřadnice jejich průsečíku.
  - b) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $t_c$ . Potom vypočtete souřadnice těžiště.
  - c) Napište obecné rovnice výšek  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$ . Potom vypočtete souřadnice průsečíku výšek.
6. Je dán trojúhelník ABC,  $A[0;0]$ ,  $B[-4;2]$ ,  $C[-6;0]$ . Vypočítejte souřadnice průsečíku výšek V, souřadnice těžiště T a souřadnice středu S kružnice trojúhelníku ABC opsané. Dokažte, že body V, T, S leží na jedné přímce.
7. Napište rovnici přímky AB,  $A[5;-2]$ ,  $B[2;-3]$  v úsekovém tvaru. Vypočítejte souřadnice průsečíků přímky AB s osami souřadnic. Vypočítej obsah trojúhelníku, který vymezuje daná přímka spolu s osami  $x$  a  $y$ .
8. Určete obecnou rovnici přímky  $p$  tak, aby procházela bodem  $M[1;4]$  a spolu s osami  $x$ ,  $y$  určovala trojúhelník o obsahu 1.
9. Rozhodněte, zda přímka  $p: 2x + 3y - 12=0$  protíná úsečku AB,  $A[2;3]$ ,  $B[5;-1]$ .
10. Určete všechny hodnoty parametru  $p \in \mathbf{R}$  tak, aby bod  $P[-4;p+3]$  ležel v polorovině  $y \geq 2x$ .
11. Je dána přímka  $p: 3x - 2y + 6 = 0$ . Určete hodnoty parametrů  $a, c \in \mathbf{R}$  tak, aby přímka  $q: ax - 5y + c = 0$  byla s přímkou  $p$  rovnoběžná a procházela bodem  $M[5;3]$ .
12. Napište obecnou rovnici přímky  $p$ , která prochází bodem  $M[4;6]$ . Dva dané body  $A[-6;10]$ ,  $B[10;-6]$  mají od  $p$  stejnou vzdálenost.
13. V trojúhelníku ABC,  $A[-3;4]$ ,  $B[-1;-2]$ ,  $C[3;6]$  vypočítejte:
 

a) výšky $v_a, v_b, v_c$	c) délku střední příčky
b) těžnice $t_a, t_b, t_c$	d) obvod a obsah $\Delta ABC$
14. Jsou dány body  $A[2;2;3]$ ,  $B[6;3;0]$ ,  $C[3;-1;-1]$ 
  - a) Dále je dán bod  $D[0;0;0]$ . Vypočítejte objem čtyřstěnu ABCD.
  - b) Na ose  $x$  určete bod X tak, aby objem čtyřstěnu ABCX byl 26.
15. V rovnoběžnostěnu  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  známe souřadnice bodů  $A[1; 0; 2]$ ,  $B[3; 4; 3]$ ,  $D[-1; 4; -6]$ ,  $A_1[2; 1; -5]$ .
  - a) Vypočítej souřadnice vrcholů C,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ .
  - b) Urči objem rovnoběžnostěnu  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .
16. Jsou dány vektory  $\vec{u}=(3;-1;0)$ ,  $\vec{v}=(9;-3;2)$ . Určete souřadnice vektoru  $\vec{z}$  tak, aby platilo  $\vec{z} \perp \vec{u} \wedge \vec{z} \perp \vec{v} \wedge |\vec{z}|=1$
17. Jsou dány vektory  $\vec{a}=(2;4;-1)$ ,  $\vec{b}=(3;1;2)$ . Určete hodnotu parametru  $p \in \mathbf{R}$  tak, aby pro vektor  $\vec{z}=(1;p;2)$  platilo  $\vec{a} \times \vec{z} \perp \vec{z} \times \vec{b}$
18. Jsou dány vektory  $\vec{a}=(2;3;-1)$ ,  $\vec{b}=(1;-2;3)$ ,  $\vec{c}=(2;-1;1)$ . Určete souřadnice vektoru  $\vec{x}$ , který je kolmý k vektoru  $\vec{a}$  i k vektoru  $\vec{b}$  a přitom  $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$
19. Jsou dány vektory  $\vec{u}=(2;3;4)$ ,  $\vec{v}=(2;m;0)$ . Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbf{R}$  tak, aby platilo:  $|\vec{u} \times \vec{v}| = 4\sqrt{6}$

Řešení:

1.  $C_1[9;5], C_2[-7;-1]$
2.  $C[2;-1]$
3.  $C_{1,2}[\pm 3+3\sqrt{3}; \pm 9+\sqrt{3}]$
4.  $B[-5;-6], C[-3;0]$
5.  $A[-2;1], B[4;3], C[10;-25]$
6.  $A[-1;1], B_1[-6;-4], B_2[4;6], C_1[15;-11], C_2[-17;13]$
7.  $B[-19;10], C[-1;4]$
8.  $A[2\frac{2}{5}; 12\frac{3}{5}], B[-14;9]$
9.  $C[2;-6]$
10.  $B[-10;-2], C[3;-6]$
11.  $A[-5;12], B[11;-4], C[-1;-2]$
12.  $C_1[6;7], C_2[1; \frac{9}{2}]$
13.  $a, b: x \pm \sqrt{3}y - 8 = 0, c: x = 0, A[0; -\frac{8}{3}\sqrt{3}], B[0; \frac{8}{3}\sqrt{3}]$ .
14.  $\alpha = \gamma = 100^\circ 18', \beta = \delta = 79^\circ 42', \omega = 47^\circ 44'$ .
15.  $B[3;1], D[1;-3]$ .
16.  $C_1 = [0;0], D_1 = [-1;-2], C_2[6\frac{2}{5}; -3\frac{1}{5}], D_2 = [5\frac{2}{5}; -5\frac{1}{5}]$ .
17.  $A[-2;6], D[-6;8]$
18.  $C_1[6;-2], D_1[3;-6], C_2[-2;4], D_2[-5;0]$ .
19.  $B[5;12], C[-4;11], D[-3;2]$ .
20.  $B[0;7], D[-2;-1]$
21.  $B[9;8], C_1[23;4], D_1[19;-10], C_2[-5;12], D_2[-9;-2]$
22.  $A[-4;-2], B[4;-4], C[6;4], D[-2;6]$
23.  $A_1[2;4], B_1[6;-2], C_1[12;2], D_1[8;8], A_2[1;-1], B_2[7;3], C_2[11;-3], D_2[5;-7]$
24.  $B_1[2;-2], C_1[2;3], D_1[-3;3], B_2[0;2], C_2[4;-1], D_2[1;-5]$
25.  $A[-8;-4], C[8;4], D[-4;8]$
26.  $A[5;3], B[-1;5], C[-3;-1], D[3;-3]$
27.  $A[0;0], B[-3;-1], C[-2;-4], D[1;-3]$
28.  $A[-2;0], B[-4;-10], C[6;-12], D[8;-2]$
29.  $A[10;14], B[-6;2], C[6;-14], D[22;-2]$
30.  $A[-1;-1], B[0;2], C[-3;3], D[-4;0]$
31.  $C_1[3;-4], B_1[2;-6], D_1[5;-5], C_2[1;-8], B_2[2;-6], D_2[3;-9]$
32.  $B[-8;0], C[-2;-2], D[0;4]$
33.  $A_1[10;0], C_1[3;6], A_2[2;4], C_2[11;2]$
34.  $C[-3;14], D[5;12]$
35.  $B_1[0;6], D_1[-4;8], B_2[-\frac{8}{5}; \frac{46}{5}], D_2[-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}]$ .

Další typy příkladů:

1. obsah nelze určit, body leží na jedné přímce a tedy nejsou vrcholy trojúhelníku
2.  $5\sqrt{6}$
3.  $60^\circ$
4.  $X[9;-6], S = 14$
5. a)  $o_{AB}: x-y=0, o_{BC}: y-\frac{3}{2}=0, o_{AC}: 4x-6y+3=0, \Rightarrow S[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$   
b)  $t_a: 5x+4y-26=0, t_b: x+2y-8=0, t_c: 2x+y-9=0 \Rightarrow T[\frac{10}{3}; \frac{7}{3}]$   
c)  $v_a: y-4=0, v_b: 2x-3y-2=0, v_c: x-y-3=0 \Rightarrow V[7;4]$ .
6.  $V[-4;4], T[-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}], S[-3;-1], V, T, S \in p: 5x+y+16=0$ .
7.  $\frac{x}{11} + \frac{y}{-11} = 1, P_x[11;0], P_y[0; -\frac{11}{3}], S_\Delta = \frac{121}{6}$
8.  $p_1: 8x-y-4=0, p_2: 2x-y+2=0$
9. protíná, body A, B leží v opačných polorovinách
10.  $p \in \langle -11; \infty \rangle$
11.  $a = \frac{15}{2}, c = \frac{-45}{2}$
12.  $x+y-10=0, 2x-y-2=0$
13.  $v_a=2\sqrt{5}, v_b=2\sqrt{10}, v_c=2\sqrt{10}, t_a=2\sqrt{5}, t_b=5\sqrt{2}, t_c=5\sqrt{2}, s_a=2\sqrt{5}, s_b=\sqrt{10}, s_c=\sqrt{10}$   
 $o=4\sqrt{10}+4\sqrt{5}, S_\Delta=20$ .
14. a)  $\frac{13}{2}$  b)  $X_1[\frac{5}{2}; 0], X_2 = [\frac{11}{2}; 0]$
15.  $C[1;8;7], B_1[4;5;-4], C_1[2;9;0], D_1[0;5;-1]$  b)  $V = 110$ .
16.  $\vec{r}_{1,2} = (\frac{\pm\sqrt{10}}{10}; \pm 3\frac{\sqrt{10}}{10}; 0)$
17.  $p_1=2, p_2=5$
18.  $\vec{x} = (-3; 3; 3)$
19.  $m_1 = -1; m_2 = \frac{-1}{5}$