# Kombinatrorika - souhrnná

1) Deset závodníků se zúčastnilo klání v pojídání švestkových knedlíků. Za největšího favorita byl považován Ludva Schnitzell, ovšem ke zklamání všech se s padesáti snězenými knedlíky nedostal ani do první pětky a odjel s brekem domů. Na bednu se stejně jako jinde dostanou první tři soutěžící, ovšem není jisté, kdo tam nakonec skončí, když Ludva již vypadl. Spočítejte, kolik existuje možných variací, tedy jak se mohou soutěžící prostřídat na medailových pozicích.
2) Minulý ročník závodu v pojídání švestkových knedlíků samozřejmě nevyhrál nikdo jiný než Ludva Schnitzell s náskokem více než dvaceti knedlíků. Opět spočítejte počet variací na medailových místech, bylo-li deset závodníků.
3) Před deseti lety, kdy se Ludva poprvé účastnil soutěže v jezení knedlíků, se umístil na předních medailových místech, avšak není již známo, na kterém místě se umístil konkrétně. Opět spočítejte počet možných variací na prvních třech místech, stále uvažujte deset závodníků.
4) Osm hostů se má ubytovat ve třech pokojích, které mají čísla 1, 2, 3. Pokoj č. 1 je třílůžkový, pokoj č. 2 také a pokoj č. 3 je dvoulůžkový. Kolika způsoby je možné uvedené hosty rozmístit v těchto třech pokojích?
5) Ze skupiny deseti kosmonautů je třeba vybrat čtyřčlennou posádku. Je však nevhodné, aby určití dva kosmonauté letěli spolu. Kolik různých výběrů posádky je možno vytvořit?
6) Jsou dány rovnoběžné (různé) přímky $p$, $q$. Na přímce $p$ je dáno osm různých bodů, na přímce $q$ jedenáct různých bodů. Určete počet:
   a) trojúhelníků s vrcholy v daných bodech,
   b) konvexních čtyřúhelníků s vrcholy v daných bodech.
7) Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet tříčlenných kombinací z nich utvořených o 21. Kolik je dáno prvků?
8) Určete počet prvků tak, aby
   a) bylo možno z nich utvořit právě 40 320 permutací;
   b) při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 56krát;
   c) při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil dvacetkrát.
9) O telefonním čísle svého spolužáka si Vašek zapamatoval jen to, že je devítimístné, začíná dvojčíslím 23, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné pětadvaceti. Určete, kolik telefonních čísel přichází v úvahu.
10) Kolika způsoby lze uspořádat množinu A = $\{a, b, c, d, e, f\}$?
    V kolika případech bude prvek $b$ před prvkem $c$?
    V kolika případech je prvek $b$ na prvním místě a zároveň prvek $c$ není na posledním místě?
    V kolika případech nebude prvek $c$ ani první, ani poslední?
11) Určete, kolika způsoby je možno seřadit u startovací čáry osm závodních automobilů do dvou řad po čtyřech vozech, jestliže
    a) v každé řadě záleží na pořadí;
    b) na pořadí v řadách nezáleží.
12) Hacker chce prolomit heslo do počítače o němž ví, že je pětimístné, obsahuje pouze malá písmena bez diakritiky a neobsahuje žádné speciální znaky. Kolik možných hesel připadá v úvahu? Jak dlouho bude trvat počítači, aby vyzkoušel všechna možná hesla, ověří-li za sekundu 100 000 různých hesel?
13) Určete počet péticiferných přirozených čísel, složených pouze z cifer 6, 7, 8, 9.
    Kolik z nich je menších než 90 000?
14) Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici; těchto číslic je na každém kotouči devět. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli heslo.
15) Na panelu je $r$ žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, žlutě nebo červeně. Určete, kolik různých stavů může panel signalizovat.
    Kolik žárovek bychom potřebovali, kdybychom chtěli rozlišit 50 různých stavů?
16) Určete, z kolika prvků lze utvořit 1 024 pětičlenných variací s opakováním.
17) Určete kolika způsoby lze přemístit písmena slova Mississippi. Kolik z nich nezačíná písmenem M?
18) Určete počet všech deseticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je roven třem. Kolik z nich je sudých?
19) Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 4, 5, 6, 7, 8, 9.

20) Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy; k dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné?
21) Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků)
a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice $8 \times 8$;
b) na libovolné dvě řady šachovnice $8 \times 8$.
22) V samoobsluze mají čtyři druhy kávy v balíčcích po padesáti gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 250 gramů kávy, jestliže
a) balíčků každého druhu mají dostatečný počet;
b) od dvou druhů mají deset balíčků a od zbývajících dvou pouze po čtyřech balíčcích.
23) Tři děvčata − Anna, Dana a Hana − se mají rozdělit o sedm stejných růží a pět stejných tulipánů. Kolika způsoby to lze provést?
24) Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno 21 zápasů a hráči hráli každý s každým jednou?
25) Určete, kolika způsoby může 10 táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit
a) do řady;
b) do řady, v níž je táborník Aleš na kraji;
c) do řady, v níž táborníci Aleš a Zdeněk nestojí vedle sebe.
26) Pro přípustné hodnoty $n$ zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{n!.(n+1)!}{(n-1)!.(n+2)!}$

b) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!.(n^2-4)}$

c) $\dfrac{(n+1)!-n.n!}{(n-1)!}$

27) Zjednodušte a vypočtěte:

a) $\binom{15}{3}+\binom{8}{5}-\binom{15}{12}$

b) $\binom{9}{8}-\binom{9}{6}+\binom{9}{4}-\binom{9}{2}$

c) $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}$

Řešení

1. $V(3,9)= 9.8.7 = 504$
2. $V(2,9) = 72$
3. $3x\ V(2,9) = 216$
4. $(8/3).(5/3).(2/2)= 560$
5. 182
6. a) 748, b) 1540
7. 7
8. a) 8, b) 6, c) 5
9. $2.V(5,6) = 1440$
10. 720; 360; 96; 480
11. a) 40320;  b) 70
12. $26^5 = 11\ 881\ 376$;  cca 119 s = 2 min
13. $V'(5,4)= 4^5= 1024$;  $3.4^4 = 768$
14. $9^5= 59\ 049$
15. $3^r$ ;4
16. 4
17. $P'(1,4,4,2)= 34\ 650$;  $P'(1,4,4,2)-P'(4,4,2) = 34\ 650 – 3150= 31\ 500$
18. 55; 46 Deseticiferné číslo, jehož ciferný součet je 3, je např. číslo 1 101 000, 1 000 200 nebo 3 000 000. Každé takové číslo se skládá buď ze tří jedniček a sedmi nul, nebo z jedné jedničky, jedné dvojky a osmi nul, nebo z jedné trojky a devíti nul. Určíme počty čísel v jednotlivých skupinách:
    a) čísla složená ze tří jedniček a sedmi nul: Na místě milionů je nenulové číslo, tedy číslo 1. Ostatní dvě jedničky a sedm nul můžeme rozmístit libovolně. Počet takových čísel je P'(2, 7).
    b) čísla složená z jedné jedničky, jedné dvojky a osmi nul: Na místě milionů je nenulové číslo, tedy číslo 1 nebo číslo 2. Druhé nenulové číslo a osm nul můžeme rozmístit libovolně. Počet takových čísel je 2 · P'(1, 8).
    c) čísla složená z jedné trojky a devíti nul: Na místě milionů je nenulové číslo, tedy číslo 3, ostatní cifry jsou nuly. Takové číslo je jen jedno.
    Sečtením počtů v jednotlivých skupinách dostaneme celkový výsledek:

$$P'(2, 7) + 2 \cdot P'(1, 8) + 1 = \frac{9!}{2!\ 7!} + 2 \cdot \frac{9!}{1!\ 8!} + 1 = 36 + 18 + 1 = 55$$

Při počítání sudých čísel postupujeme podobně:
a) čísla složená ze tří jedniček a sedmi nul: Na místě milionů je nenulové číslo, tedy číslo 1, na místě jednotek je sudé číslo, tedy číslo 0. Ostatní dvě jedničky a šest nul můžeme rozmístit libovolně. Počet takových čísel je P'(2, 6).
b) čísla složená z jedné jedničky, jedné dvojky a osmi nul: Na místě milionů je nenulové číslo, tedy číslo 1 nebo číslo 2. Pokud je na místě milionů číslo 1, můžeme číslo 2 a osm nul rozmístit libovolně (číslo 2 je sudé). Pokud je místě milionů číslo 2, tak na místě jednotek je nula. Jedničku a sedm nul můžeme rozmístit libovolně. Počet takových čísel je P'(1, 8) + P'(1, 7).
c) čísla složená z jedné trojky a devíti nul: Na místě milionů je nenulové číslo, tedy číslo 3, ostatní cifry jsou nuly. Takové číslo je jen jedno a je sudé, proto ho můžeme započítat do výsledku.
Sečtením počtů v jednotlivých skupinách dostaneme celkový výsledek:

$$P'(2, 6) + P'(1, 8) + P'(1, 7) + 1 = \frac{8!}{2!\ 6!} + \frac{9!}{1!\ 8!} + \frac{8!}{1!\ 7!} + 1 = 28 + 9 + 8 + 1 = 46$$

19. Délkám stran trojúhelníka vzhledem k trojúhelníkové nerovnosti nevyhovují následující tři trojice čísel: 4–4–8, 4–4–9, 4–5–9. Musíme je proto odečíst od celkového počtu trojic, které lze sestavit ze šesti zadaných čísel. Na pořadí čísla v trojici nezáleží, počet trojic je proto K'(3, 6) = 56. Trojic, které odpovídají velikostem stran trojúhelníka, je tedy 56 − 3 = 53.
20. $K'(3,3)-1= 9$
21. P'(1, 1, 2, 2, 2, 8) = **64 864 800** ; (8/2) . P'(1, 1, 2, 2, 2, 8)
22. a) K'(5, 4) = **56** ; b) K'(5, 4) − 2 = **54**

23. $K'(7, 3) \cdot K'(5, 3) =$ **756**
24. 7
25. a) 10!   b) 2.9!   c) 10! - 2.9! = 8.9!