M - Goniometrie a trigonometrie

Určeno jako učební text pro studenty dálkového studia a jako shrnující učební text pro studenty denního studia.

VARIACE

1

Goniometrie a trigonometrie

Tato kapitola se zabývá goniometrickými funkcemi, výpočty u pravoúhlého, ale i u obecného trojúhelníka.

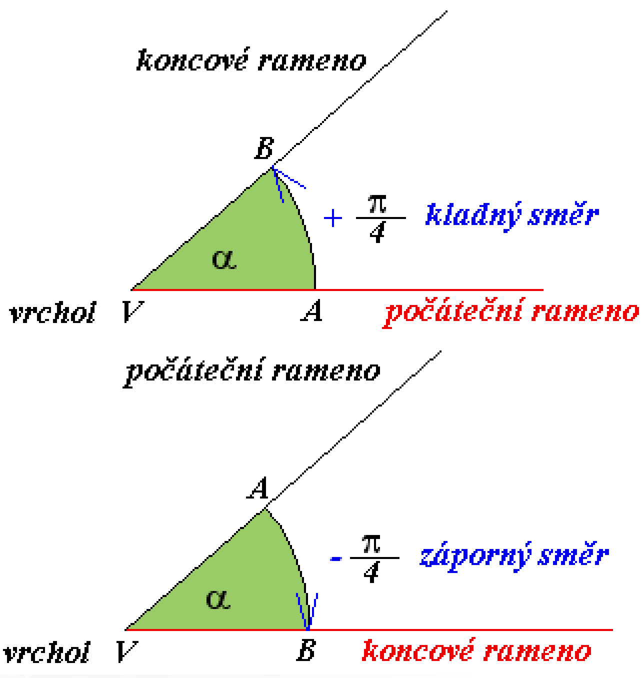
Orientovaný úhel

Orientovaný úhel

Orientovaným úhlem AVB se nazývá uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB, kde V je jejich společný počátek, přičemž:
VA je počáteční rameno úhlu
VB je koncové rameno úhlu
V je vrchol orientovaného úhlu

Hodnota orientovaného úhlu je kladná, jestliže se počáteční rameno VA otáčí kolem vrcholu V směrem ke koncovému rameni VB proti směru chodu hodinových ručiček.
Hodnota orientovaného úhlu je záporná, jestliže se počáteční rameno VA otáčí kolem vrcholu V směrem ke koncovému rameni VB po směru chodu hodinových ručiček.

Orientovaný úhel AVB



Velikost orientovaného úhlu ***AVB*** v míře stupňové je:

$$|AVB| = \alpha + k \,.\, 360°$$

kde ***k*** je celé číslo a $\alpha \in \langle 0;\ 360°)$

a v míře obloukové:

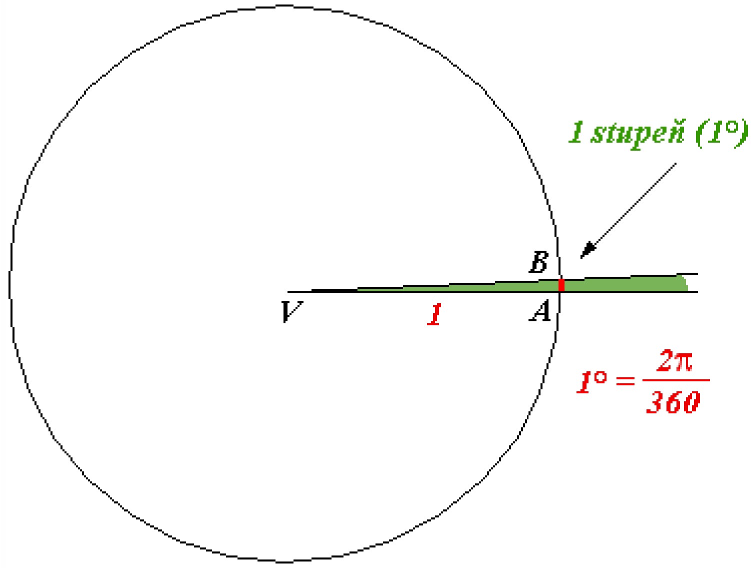
$$|AVB| = \alpha + k \,.\, 2\pi\, rad$$

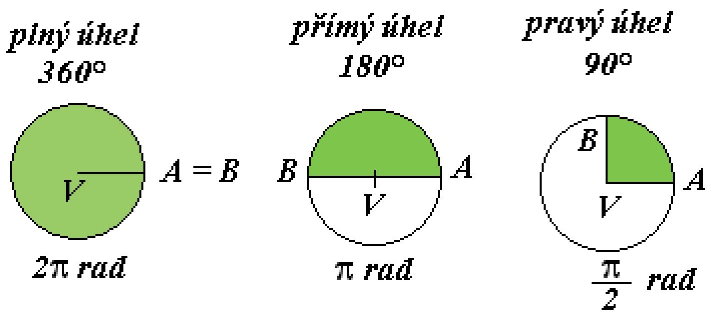
kde ***k*** je celé číslo a $\alpha \in \langle 0;\ 2\pi)$

Stupňová a oblouková míra

Velikost úhlů můžeme vyjadřovat jednak ve stupňové míře (plný úhel pak má 360°) a dále v míře obloukové (plný úhel pak má velikosti 2π rad).

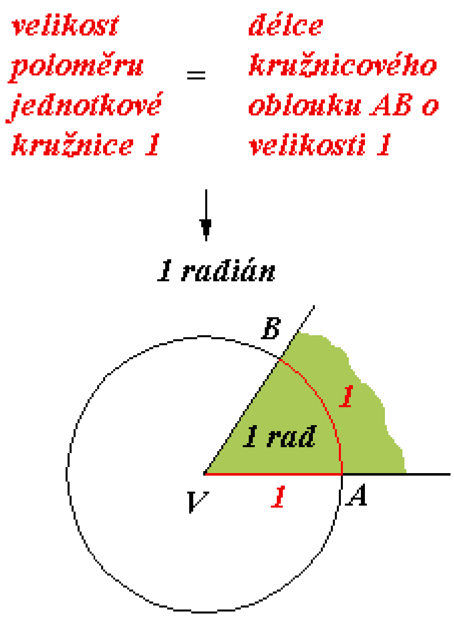
<u>Stupňová míra:</u>

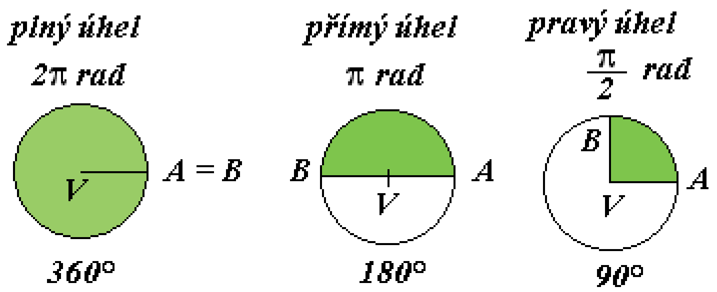




<u>Oblouková míra:</u>

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} = 57°17'45''$$





π je tzv. Ludolfovo číslo a jeho hodnota je přibližně 3,14. Plný úhel má tedy hodnotu 2π rad, což je tedy přibližně 6,28 radiánů.

K převodům velikostí úhlů ze stupňů na radiány a naopak můžeme výhodně využít např. trojčlenku.

U číselné hodnoty úhlu v obloukové míře se obvykle jednotka rad vynechává.

Příklad 1:
Úhel o velikosti 15° převeďte do obloukové míry.

Řešení:

180° ... π rad
15° ... x rad

Jedná se vždy o přímou úměrnost (šipky na obou stranách směrem vzhůru)

$$x = \frac{\pi .15}{180} = \frac{\pi}{12} rad$$

Pozn.: Výsledek můžeme klidně vyjádřit i ve tvaru 0,26 rad (přibližně)

Příklad 2:
Úhel o velikosti $3\pi/4$ rad převeďte na stupně.

Řešení:

180° ... π rad

x° … 3π/4 rad

Jedná se vždy o přímou úměrnost (šipky na obou stranách směrem vzhůru)

$$x = 180.\frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = 135^\circ$$

Úhel má tedy velikost 135°.

Z předchozích postupů můžeme snadno odvodit vzorce pro převody jedním nebo druhým směrem:

1. Převod ze stupňů na míru obloukovou

$$x = \frac{\pi.\alpha^\circ}{180} rad$$

2. Převod z radiánů na míru stupňovou

$$x = \frac{180.\alpha rad}{\pi}$$

Stupňová a oblouková míra - procvičovací příklady

1. Velikost úhlu α = π/5 rad vyjádřete v míře stupňové. *1244*

Výsledek: 36°

2. Velikost úhlu α = π/90 rad vyjádřete v míře stupňové. *1245*

Výsledek: 2°

3. Velikost úhlu α = 60° vyjádřete v míře obloukové. *1236*

Výsledek: π/3 rad

4. Velikost úhlu α = 3,002 rad vyjádřete v míře stupňové. *1253*

Výsledek: 172°

5. Velikost úhlu α = 112° vyjádřete v míře obloukové. *1242*

Výsledek: 28π/45 rad

6. Velikost úhlu α = π/12 rad vyjádřete v míře stupňové. *1246*

Výsledek: 15°

7. Velikost úhlu α = 31° vyjádřete v míře obloukové. *1241*

Výsledek: 31π/180 rad

8. Velikost úhlu $\alpha = 23\pi/180$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1249*

Výsledek: 23°

9. Velikost úhlu $\alpha = 40°$ vyjádřete v míře obloukové. *1234*

Výsledek: $2\pi/9$ rad

10. Velikost úhlu $\alpha = 4°$ vyjádřete v míře obloukové. *1231*

Výsledek: $\pi/45$ rad

11. Velikost úhlu $\alpha = 7\pi/6$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1247*

Výsledek: 210°

12. Velikost úhlu $\alpha = 168°$ vyjádřete v míře obloukové. *1240*

Výsledek: $14\pi/15$ rad

13. Velikost úhlu $\alpha = 360°$ vyjádřete v míře obloukové. *1238*

Výsledek: 2π rad

14. Velikost úhlu $\alpha = 45°$ vyjádřete v míře obloukové. *1235*

Výsledek: $\pi/4$ rad

15. Velikost úhlu $\alpha = 3\pi/2$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1250*

Výsledek: 270°

16. Velikost úhlu $\alpha = 0{,}174$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1251*

Výsledek: 9,97°

17. Velikost úhlu $\alpha = 270°$ vyjádřete v míře obloukové. *1237*

Výsledek: $3\pi/2$ rad

18. Velikost úhlu $\alpha = 18°$ vyjádřete v míře obloukové. *1233*

Výsledek: $\pi/10$ rad

19. Velikost úhlu $\alpha = 0{,}698$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1254*

Výsledek: 40°

20. Velikost úhlu $\alpha = 1{,}222$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1252*

Výsledek: 70,02°

21. Velikost úhlu $\alpha = 5°$ vyjádřete v míře obloukové. *1232*

Výsledek: $\pi/36$ rad

22. Velikost úhlu $\alpha = 100°$ vyjádřete v míře obloukové. *1239*

Výsledek: $5\pi/9$ rad

23. Velikost úhlu $\alpha = \pi$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1243*

Výsledek: 180°

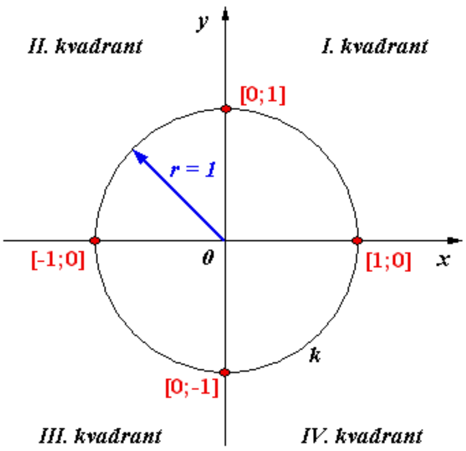
24. Velikost úhlu $\alpha = 13\pi/12$ rad vyjádřete v míře stupňové. *1248*

Výsledek: 195°

Jednotková kružnice

Jednotková kružnice

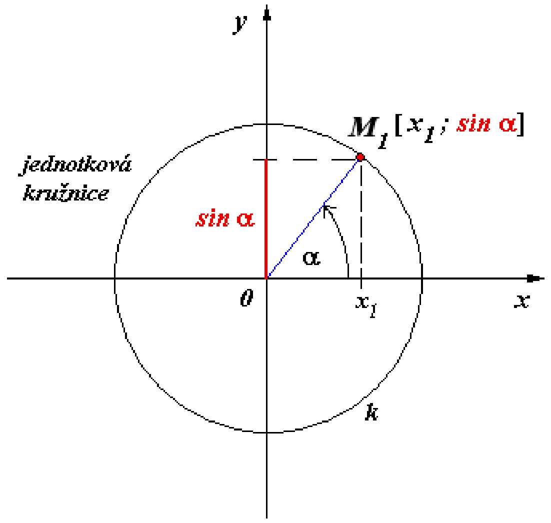
Jednotková kružnice je taková kružnice, jejíž poloměr je 1. Využít ji můžeme například k odvození goniometrických funkcí platících pro pravoúhlý trojúhelník.



Funkce sinus

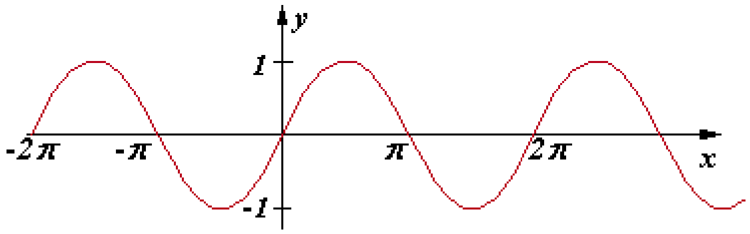
Funkce sinus

Určení funkce z jednotkové kružnice:



V pravoúhlém trojúhelníku je funkce sinus určena jako podíl protilehlé odvěsny a přepony.

graf: f: y = sin x



Funkce sinus je tedy goniometrická funkce daná předpisem f: y = sinα

1. Definiční obor funkce ***D(f)*** = ***R***,
2. Obor hodnot ***H(f)*** je ⟨ -1; 1 ⟩
3. Funkce je omezená shora i zdola
4. Funkce je periodická s periodou ***2π***
5. Funkce je lichá

Poznámky:

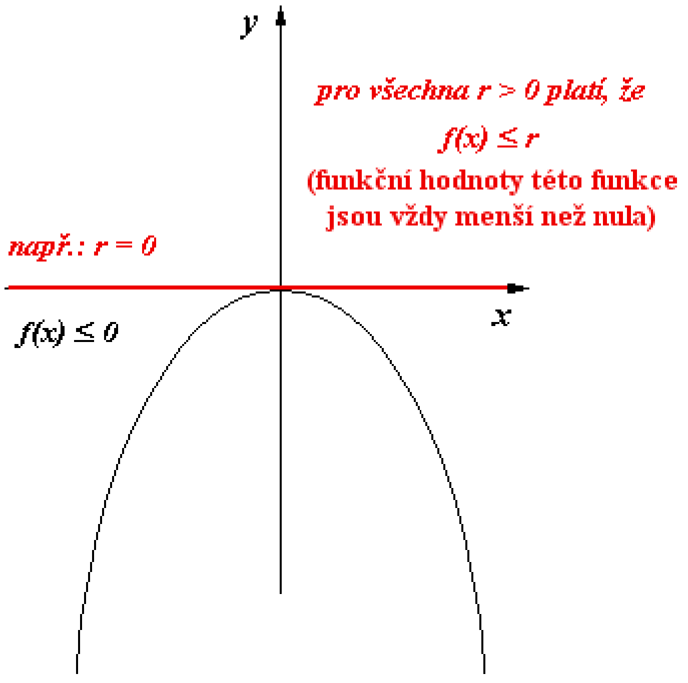
Funkce shora omezená:

Funkce ***f*** definovaná na množině ***A***, která je podmnožinou definičního oboru ***D(f)***, se nazývá ***shora omezená*** (ohraničená), právě když existuje takové číslo ***r*** ∈ ***R***, že pro všechna ***x*** ∈ ***A*** je

f(x) ≤ ***r***.

Pokud existuje v oboru reálných čísel (v grafickém vyjádření je to na ose ***y***) tak velké číslo, kterého funkční hodnota dané funkce nemůže nikdy nabýt, potom je tato funkce funkcí omezenou shora.

Např.: f: y = - x², D(f) = R, H(f) = (- ∞ ; 0)



Tato funkce je shora omezená

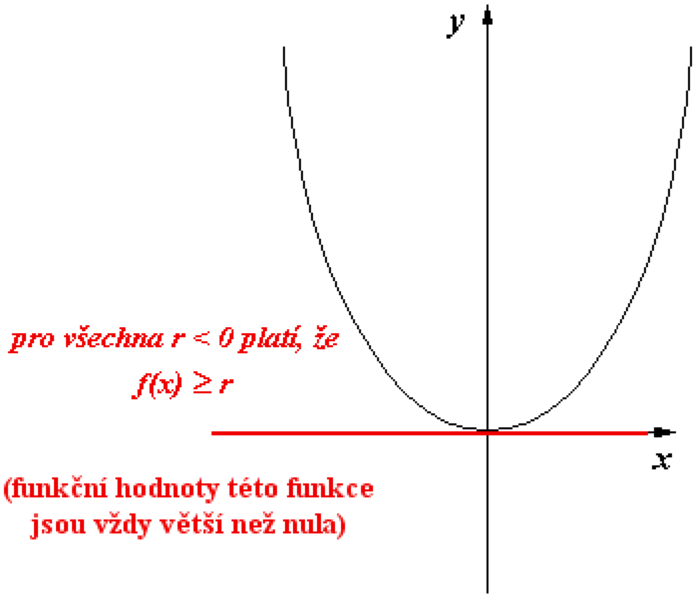
Funkce zdola omezená:

Funkce ***f*** definovaná na množině ***A***, která je podmnožinou definičního oboru ***D(f)***, se nazývá ***zdola omezená*** (ohraničená), právě když existuje takové číslo ***r*** ∈ ***R***, že pro všechna ***x*** ∈ ***A*** je

f(x) ≥ ***r***.

Pokud existuje v oboru reálných čísel (v grafickém vyjádření je to na ose ***y***) tak malé číslo, kterého funkční hodnota dané funkce nemůže nikdy nabýt, potom je tato funkce funkcí omezenou zdola.

Např.: *f: y =* x^2, *D(f) = R, H(f) =* $\langle 0 ; +\infty)$



Tato funkce je zdola omezená

Funkce periodická:

Funkce se nazývá ***periodická***, jestliže existuje takové číslo $\boldsymbol{p > 0}$, že pro každé celé číslo $\boldsymbol{k}$ platí:
1. Funkce je definována v bodech $\boldsymbol{(x + kp)}$, je-li definována v bodě $\boldsymbol{x}$.
2. Pro všechna $\boldsymbol{x}$ z definičního oboru $\boldsymbol{D(f)}$ platí:

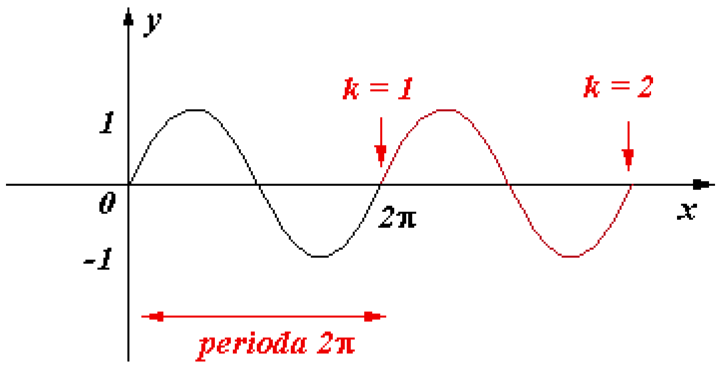
$$f(x) = f(x + kp)$$

Číslo $\boldsymbol{p}$ se potom nazývá ***perioda funkce***
Zjednodušeně je možné říci, že funkční hodnota periodické funkce se stále opakovaně mění a každé "opakování" funkce má délku právě jedné periody.

Např.: $y = \sin x,\ p = 2\pi$

1. $y = \sin x$ **je** x **je definována v bodě** $x = 0$**, je definována také v bodě (0 + 1. 2π; 0 + 2.2π; 0 + 3.2π) atd.**
2. Pro periodicko funkci $y = \sin x$ **platí:**

$$\sin x = \sin (x + k.2\pi)$$



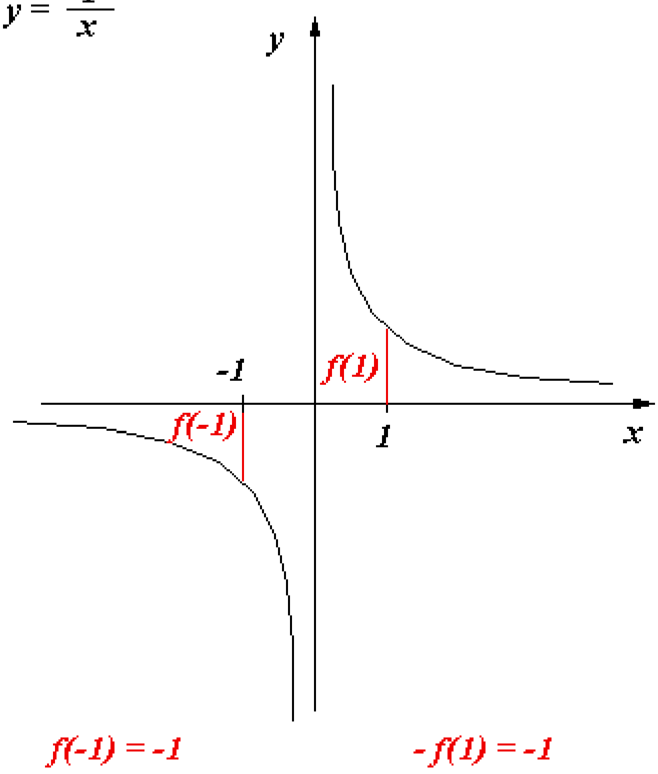
Funkce lichá:

Funkce f se nazývá lichá, jestliže pro všechna x z jejího definičního oboru je

$f(-x) = -f(x)$

Graf liché [funkce]() je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

$f\colon y = \dfrac{1}{x}$



Funkce $y = \dfrac{1}{x}$ **je lichá funkce.**

Funkce

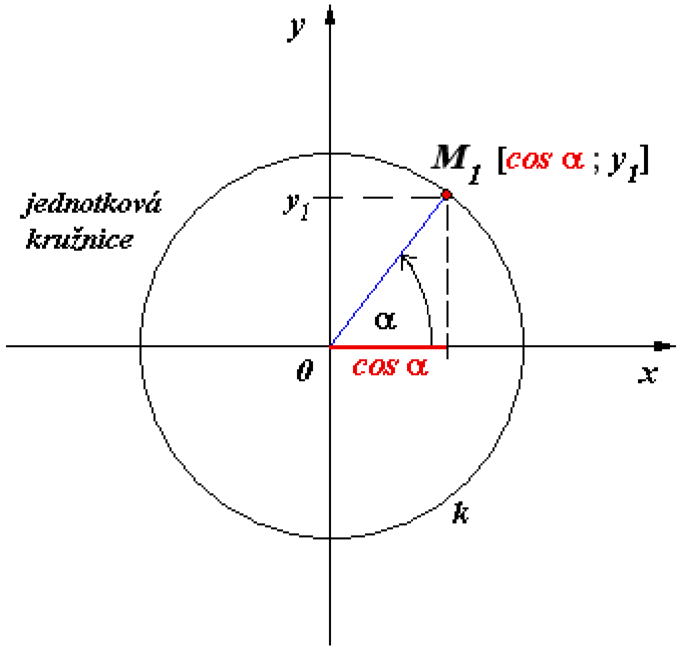
$$y = \frac{1}{\sin \alpha}$$

se nazývá kosekans α a zapisuje se y = cosec α

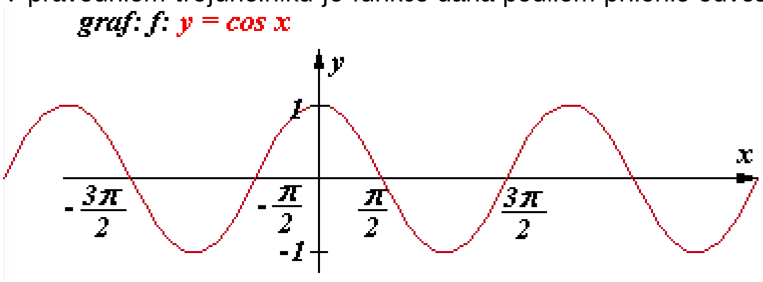
◈ **Funkce kosinus**

Funkce kosinus

Určení funkce z jednotkové kružnice:



V pravoúhlém trojúhelníku je funkce dána podílem přilehlé odvěsny a přepony.



Funkce kosinus je funkce, která je dána předpisem f: y = cos α .

1. Definiční obor funkce $D(f) = R$,
2. Obor hodnot $H(f)$ je $\langle -1; 1 \rangle$
3. Funkce je omezená shora i zdola
4. Funkce je periodická s periodou 2π
5. Funkce je sudá

Poznámky:

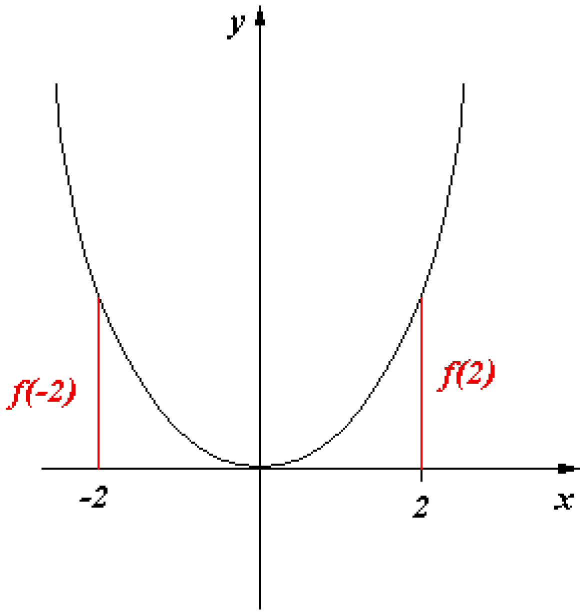
Funkce sudá:

Funkce f se nazývá sudá, jestliže pro všechna x z jejího definičního oboru $D(f)$ je

$f(-x) = f(x)$

Grafy sudých funkcí jsou souměrné podle osy y.

$f\colon y = x^2$



Funkce

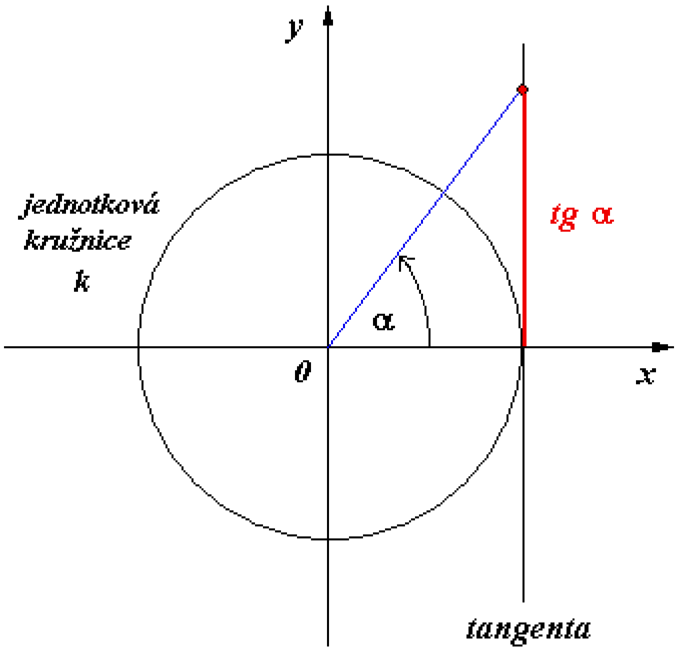
$$y = \frac{1}{\cos\alpha}$$

se nazývá sekans α, zapisujeme $y = \sec\alpha$

◈ Funkce tangens

Funkce tangens

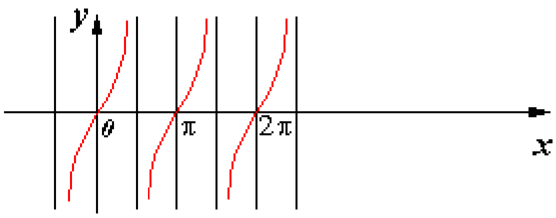
Určení funkce tangens z jednotkové kružnice:



Funkce tangens α je goniometrická funkce definovaná pomocí funkcí sinus a kosinus a má tvar:

$$tg\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Graf funkce $y = tg\ \alpha$



V pravoúhlém trojúhelníku je funkce dána podílem protilehlé a přilehlé odvěsny.

Vlastnosti funkce:

1. Definiční obor $D(f)$: $\alpha \in R$; $\alpha \neq (2k + 1)\ \pi/2$
2. Obor hodnot $H(f) = R$
3. Funkce je lichá
4. Funkce je periodická s periodou $k.\pi$
5. Funkce není omezená shora ani zdola
6. Pro $\alpha \in (-\pi/2 + k\pi\ ;\ \pi/2 + k\pi)$ je rostoucí

Poznámky:

Funkce rostoucí:

Funkce f definovaná na množině A, která je podmnožinou definičního oboru $D(f)$, se nazývá ***rostoucí,*** jestliže pro dva libovolné body

x_i a $x_j \in A$

pro něž platí

$x_i > x_j$

zároveň platí nerovnost

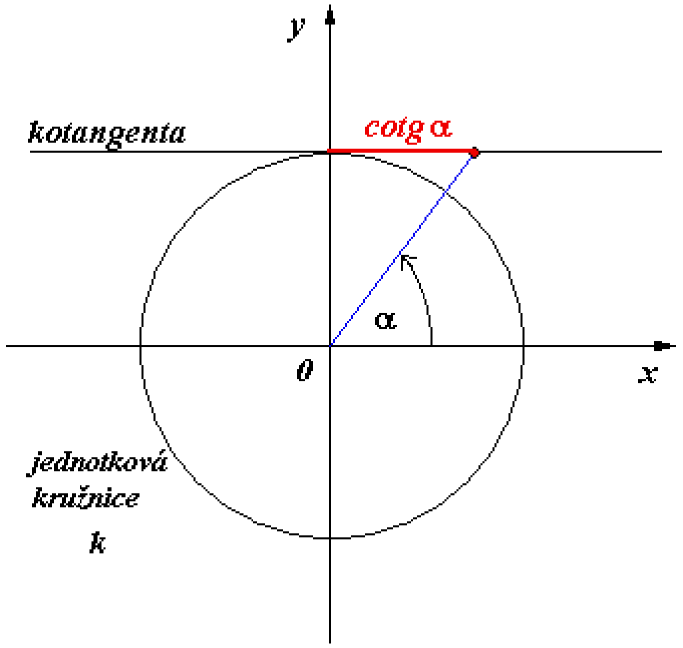
$f(x_i) > f(x_j)$

Je možné říci, že při vrůstajících hodnotách nezávisle proměnné rostou i funkční hodnoty rostoucí funkce.
Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají ***ryze monotónní***. Funkce neklesající a nerostoucí se nazývají ***monotónní***.

Funkce kotangens

Funkce kotangens

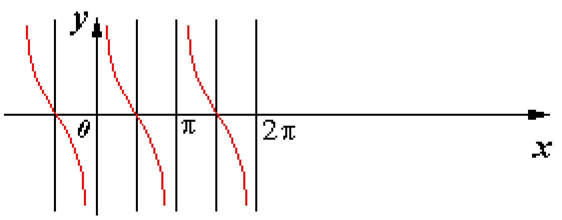
Určení funkce z jednotkové kružnice:



Funkce y = cotg α je goniometrická funkce, která je definována pomocí funkcí sinus a kosinus a má tvar:

$$\cot g\ \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha}$$

Graf funkce y = cotg α



V pravoúhlém trojúhelníku je funkce definována jako podíl přilehlé odvěsny a protilehlé odvěsny.

Vlastnosti funkce:

1. Definiční obor $D(f)$: $\alpha \in R$; $\alpha \neq k\pi$
2. Obor hodnot $H(f) = R$
3. Funkce je lichá
4. Funkce je periodická s periodou $k.\pi$
5. Funkce není omezená shora ani zdola
6. Pro $\alpha \in (k\pi\ ;\ \pi + k\pi)$ je klesající

Poznámky:

Funkce klesající:

Funkce f definovaná na množině A, která je podmnožinou definičního oboru $D(f)$ se nazývá ***klesající,*** jestliže pro dva libovolné body

x_i a $x_j \in A$

pro něž platí

$x_i > x_j$,

zároveň platí nerovnost

$f(x_i) < f(x_j)$

Je možné říci, že při vzrůstajících hodnotách nezávisle proměnné funkční hodnoty klesající funkce klesají. Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají ***ryze monotónní***. Funkce neklesající a nerostoucí se nazývají ***monotónní.***

Řešení pravoúhlého trojúhelníka

Řešení pravoúhlého trojúhelníka

Mění-li se v pravoúhlém trojúhelníku velikost úhlu alfa, mění se i poměry délek stran v tomto trojúhelníku. Proto jsou v pravoúhlém trojúhelníku definovány tyto vztahy pro goniometrické funkce ostrého úhlu:

1. Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníka se nazývá sinus ***úhlu*** α,

$$\sin \alpha$$

2. Poměr délky přilehlé odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku se nazývá kosinus ***úhlu*** α,

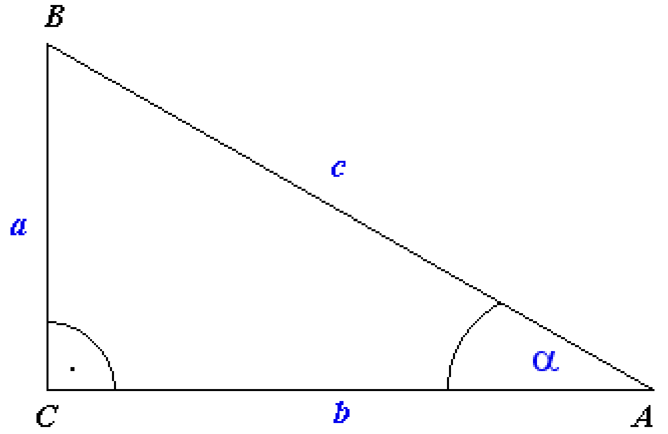
$$\cos \alpha$$

3. Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku se nazývá tangens ***úhlu*** α,

$$tg\ \alpha$$

4. Poměr délky přilehlé odvěsny a délky protilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku se nazývá kotangens ***úhlu*** α,

$$cotg\ \alpha$$



a ... protilehlá odvěsna ***b ... přilehlá odvěsna***

c ... přepona

$$sin\ \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{b}{a}$$

Pozn.: Veškeré výpočty goniometrických funkcí budeme provádět zpravidla na kalkulačce a výsledky budeme udávat s přesností na čtyři platné číslice. Respektujeme přitom správné zaokrouhlení čísel.
Za platnou číslici se považuje každá číslice v čísle, která je na pozici počínaje od první nenulové zleva.
Pokud nebude zadáno jinak, vždy uvažujeme obvyklé značení v pravoúhlém trojúhelníku, což je: Pravý úhel při vrcholu C, přepona c, odvěsny a, b, ostré úhly při vrcholu A, B.

Příklad 1:

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je |AB| = c = 8 cm, |BC| = a = 5 cm. Vypočti velikosti ostrých úhlů při vrcholech A, B trojúhelníku ABC.

Řešení:

|AB| = c = 8 cm
|BC| = a = 5 cm
α = ? [° ´]
β = ? [° ´]

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{8}$$

sin α = 0,625
α = 38°41´

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{5}{8}$$

cos β = 0,625
β = 51°19´

Závěr: Vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 38°41´a vnitřní úhel při vrcholu B má velikost 51°19´.

Příklad 2:

V pravoúhlém trojúhelníku OPQ s pravým úhlem při vrcholu Q je |OQ| = p = 5 cm, |úhel QOP| = 35°10´. Vypočti délku odvěsny |PQ| = o.

Řešení:

|OQ| = p = 5 cm
|úhel QOP| = 35°10´
|PQ| = o = ? [cm]

$$tg\left|úhelQOP\right| = \frac{\left|PQ\right|}{\left|OQ\right|}$$

|PQ| = |OQ| . tg|úhel QOP|
|PQ| = 5 . tg 35°10´= 5 . 0,7046 = 3,5 (po zaokrouhlení)
|PQ| = 3,5 cm (po zaokrouhlení)

Závěr: Délka odvěsny je přibližně 3,5 cm.

Příklad 3:

Nejvyšší přípustné stoupání silnic je dáno poměrem 1 : 18. Pod jakým největším úhlem může silnice stoupat?

Řešení:

|BC| = 1 díl
|AB| = 18 dílů
α = ? [°´]

$$tg\alpha = \frac{\left|BC\right|}{\left|AB\right|}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{18}$$

tg α = 0,0556
α = 3°11´

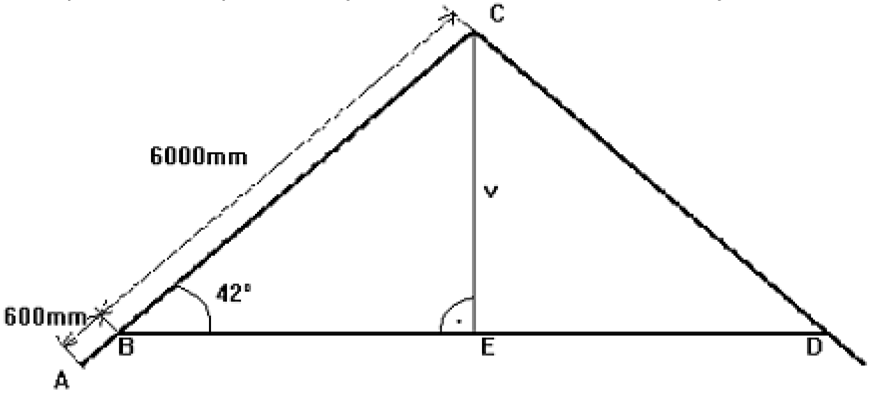
Závěr: Úsek silnice může stoupat nejvýše pod úhlem 3°11´.

◈ Řešení pravoúhlého trojúhelníka - procvičovací příklady

1. Délka a šířka obdélníku jsou v poměru 8 : 5. Jak velké úhly svírá úhlopříčka obdélníku s jeho stranami? *1469*

Výsledek: S delší stranou 32°, s kratší stranou 58°.

2. Krov dlouhý 6,6 m přesahuje přes okraj zdi 60 cm své délky a s rovinou půdy svírá úhel 42° (viz obrázek). O kolik centimetrů by se snížila výška půdy v, kdyby tentýž krov přesahoval přes okraj zdi 75 centimetrů své délky? *1479*

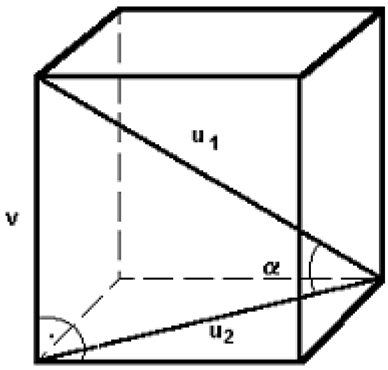


Výsledek: 22,8 cm

3. V kosočtverci ABCD je úhlopříčka |AC| = e = 24 cm a |úhel SAB| = ε = 28°; S je průsečík úhlopříček AC a BD. Vypočtěte obvod kosočtverce ABCD. *1475*

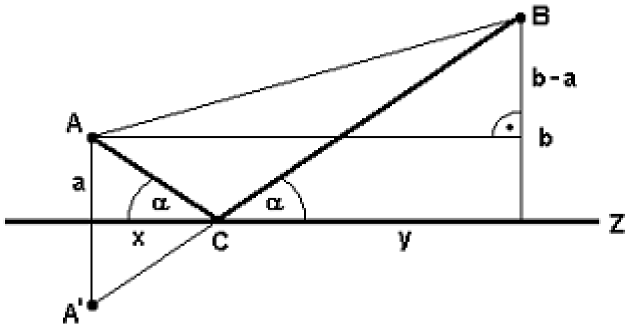
Výsledek: 54 cm

4. Tělesová úhlopříčka u_1 kvádru je dlouhá 9,7 dm a s podstavnou úhlopříčkou u_2 svírá úhel α = 42°. Vypočti výšku kvádru v. *1463*



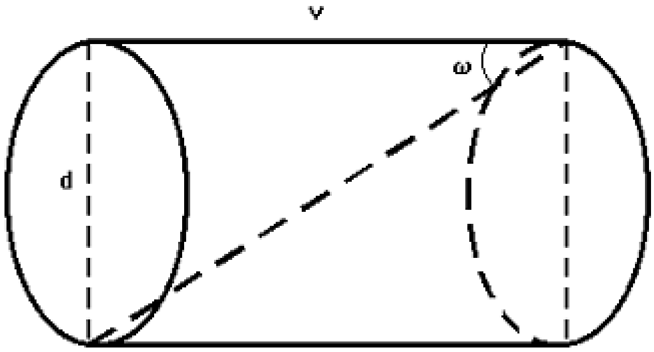
Výsledek: 6,5 dm

5. Před rovinným zrcadlem jsou dva body A, B vzdálené od sebe 36 cm. Vzdálenost bodu A od zrcadla je 7 cm, bodu B 18 cm. Pod jakým úhlem je třeba vést světelný paprsek (jde o úhel mezi rovinou zrcadla a paprskem) bodem A, aby po odrazu procházel bodem B? *1480*



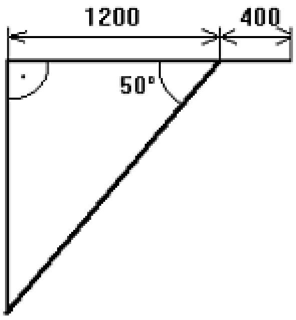
Výsledek: 36,1°

6. Průměr podstavy válce je 36 cm. Velikost úhlu ω, který svírá úhlopříčka osového řezu s výškou válce v, je 30°. Vypočti povrch válce. *1473*



Výsledek: 9083 cm^2

7. Rampu u skladu zboží drží 4 stejné ocelové vzpěry, jedna z nich je nakreslena na obrázku. Kolik metrů ocelové trubky čtvercového průřezu se spotřebovalo k výrobě všech čtyř vzpěr, jestliže se jejich spotřeba úpravou ve svárech zvýšila o 7 procent? *1478*



Výsledek: 21 m

8. V rovnoramenném trojúhelníku XYZ je dána délka jeho základny |XY| = z = 9 cm a velikost úhlu |úhel XYZ| = 50°10´. Vypočti obsah tohoto trojúhelníku. *1474*

Výsledek: 24,3 cm^2

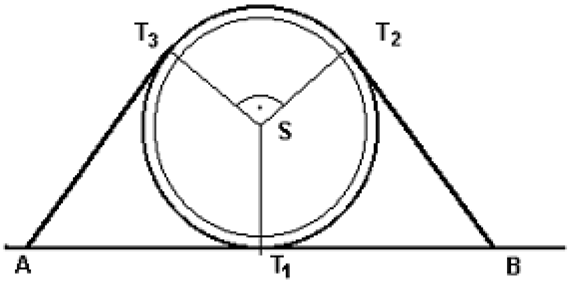
9. Úhlopříčka obdélníkového půdorysu chaty je dlouhá 10 m a s kratší stranou tohoto půdorysu svírá úhel 60°. Vypočti obsah půdorysu chaty. *1470*

Výsledek: 43,3 m^2

10. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je délka přepony |AB| = c = 6,9 cm a |úhel CAB| = α 34°. Vypočti délky odvěsen AC a BC. *1467*

Výsledek: a = 3,9 cm, b = 5,7 cm

11. Stabilitu roury na vodorovné podložce zabezpečuje ocelové lano, které rouru obepíná. Lano je ukotveno v bodech A, B. Platí $|AT_1| = |BT_1|$; T_1 je bod dotyku roury s podložkou. Vypočítejte délku lana od bodu A do bodu B, jestliže vnější průměr roury se rovná 44 cm a velikost úhlu T_3ST_2 je rovna 90°; S je střed kruhového průřezu rourou, který je kolmý na osu roury. *1481*



Výsledek: 140,8 cm

12. V pravoúhlém trojúhelníku EFG jsou dány délky odvěsen |FG| = e = 10,4 m a |EG| = f = 6,8 m. Vypočti velikosti jeho ostrých úhlů při vrcholech E a F. *1468*

Výsledek: Úhel při vrcholu E má velikost 56°49´ a úhel při vrcholu F má velikost 33°11´

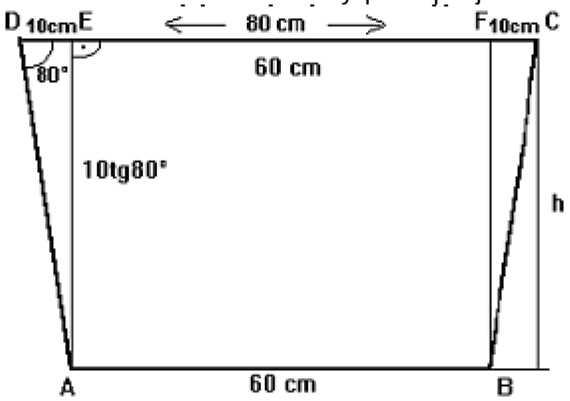
13. Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je AB a platí: *1466*
α = 63°10´, a = 6,7 m

Výsledek: b = 3,39 m, c = 7,51 m, β = 26°50´, γ = 90°

14. Vypočti obsah kosočtverce ABCD, je-li tangens úhlu ABD roven $\sqrt{15}$ a |AC| = 4 cm. *1471*

Výsledek: 2,1 cm^2

15. Profil příkopu na obrázku je rovnoramenný lichoběžník se základnami dlouhými 60 cm a 80 cm. Sklon boční stěny příkopu je 80°. Vypočti hloubku příkopu. *1472*



Výsledek: 56,7 cm

16. Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je AB a platí: *1464*
$a = 24$ cm, $c = 30$ cm.

Výsledek: $b = 18$ cm, $\alpha = 53°08´$, $\beta = 36°52´$, $\gamma = 90°$

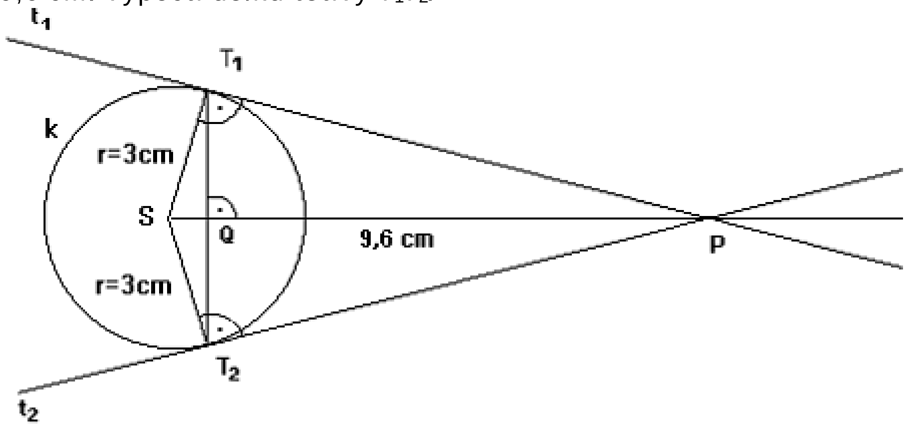
17. Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je AB a platí: *1465*
$\alpha = 48°30´$, $c = 3{,}2$ m

Výsledek: $a = 2{,}40$ m, $b = 2{,}12$ m, $\beta = 41°30´$, $\gamma = 90°$

18. Přímá železniční trať stoupla na vzdálenosti 100 m (měřeno ve vodorovné poloze) o 1,4 m. Vypočítej velikost úhlu stoupání. *1461*

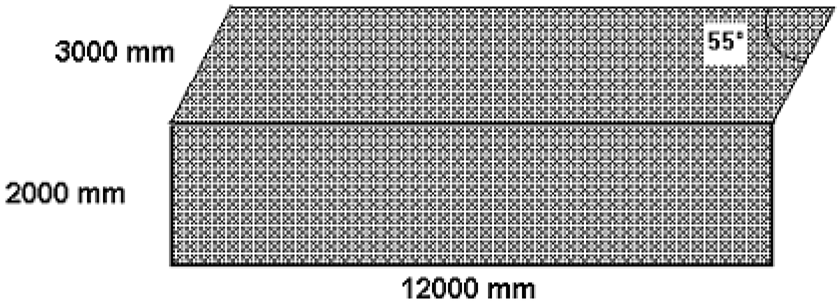
Výsledek: 0,83°

19. Na obrázku jsou narýsovány tečny t_1 a t_2 z bodu P ke kružnici k(S; 3 cm). Platí: $|PS| = 9{,}6$ cm. Vypočti délku tětivy T_1T_2. *1476*



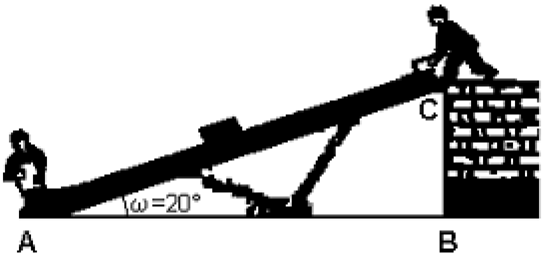
Výsledek: 5,7 cm

20. Jedna část střechy má tvar obrazce složeného z obdélníku a z kosodélníku (viz obrázek). Vypočti spotřebu tašek na její pokrytí, počítá-li se s 18 taškami na jeden metr čtverečný a s osmi procenty tašek navíc z důvodu jejich tvarové úpravy. *1477*



Výsledek: 1040 ks

21. Stavební materiál byl na stavbu dopravován transportérem dlouhým 10 m pod úhlem ω = 20°. Do jaké výšky v metrech byl tento materiál dopravován? (Obloukovité zakončení transportéru neber v úvahu.) *1462*



Výsledek: 3,4 m

22. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je dáno: b = 30 cm, β = 67°. Vypočti délku odvěsny a. *1460*

Výsledek: 12,7 cm

◈ Tabulka důležitých hodnot gon. funkcí

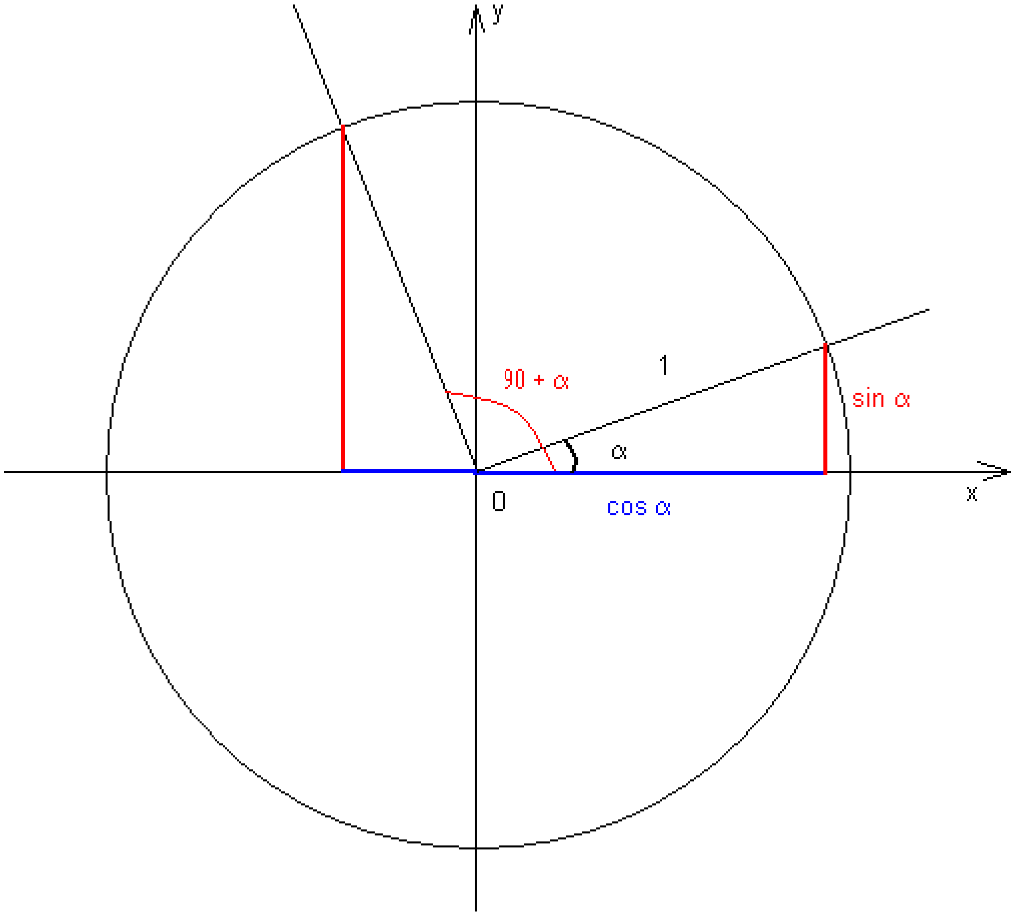
Tabulka důležitých hodnot goniometrických funkcí

	0°	30°	45°	60°	90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nedefinováno
cotg x	Nedefinováno	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

◈ Goniometrické funkce úhlů větších než 90°

Goniometrické funkce úhlů větších než 90°

Určíme snadno z jednotkové kružnice na základě znalosti úhlů do 90°.



Všimněme si, že pro základní úhel α vychází funkce sinus jako svislá úsečka (označena červeně) a funkce kosinus jako vodorovná úsečka (označena modře). Navíc pro základní úhel α je funkce sinus "krátká" úsečka a funkce kosinus "dlouhá" úsečka. Toho všeho využijeme pro určení dalších vzorců.
Obrázek naší jednotkové kružnice využijeme pro určení vzorců pro úhly velikosti (90° + α). Pro určení dalších vzorců budou úvahy analogické, proto už budou pouze popsány slovy (bez náčrtku jednotkové kružnice).

Platí tedy:
sin (90° + α) = červená (svislá) úsečka; protože je dlouhá, jde tedy o kosinus a protože směřuje do kladné poloosy, je výsledek kladný
Závěr:
sin (90° + α) = cos α

cos (90° + α) = (modrá) vodorovná úsečka; protože je krátká, jde o sinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
cos (90° + α) = - sin α

Hodnoty tangens a kotangens určíme z právě uvedených hodnot funkcí sinus a kosinus pomocí známých vzorců:

$$tg(90+\alpha)=\frac{\sin(90+\alpha)}{\cos(90+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(90+\alpha)=\frac{\cos(90+\alpha)}{\sin(90+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-tg\alpha$$

Nyní budeme zkoumat hodnoty úhlu (180 -α):

Úvahy z jednotkové kružnice jsou analogické.
sin (180° - α) = červená (svislá) úsečka; protože je krátká, jde tedy o sinus a protože směřuje do kladné poloosy, je výsledek kladný
Závěr:
sin (180° - α) = sin α

cos (180° - α) = (modrá) vodorovná úsečka; protože je dlouhá, jde o kosinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
cos (180° - α) = - cos α

$$tg(180-\alpha)=\frac{\sin(180-\alpha)}{\cos(180-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(180-\alpha)=\frac{\cos(180-\alpha)}{\sin(180-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\mathrm{cotg}\,\alpha$$

Nyní budeme zkoumat hodnoty úhlu (180 + α):
Úvahy z jednotkové kružnice jsou analogické.
sin (180° + α) = červená (svislá) úsečka; protože je krátká, jde tedy o sinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
sin (180° + α) = - sin α

cos (180° + α) = (modrá) vodorovná úsečka; protože je dlouhá, jde o kosinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
cos (180° + α) = - cos α

$$tg(180+\alpha)=\frac{\sin(180+\alpha)}{\cos(180+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(180+\alpha)=\frac{\cos(180+\alpha)}{\sin(180+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{cotg}\,\alpha$$

Nyní budeme zkoumat hodnoty úhlu (270 - α):
Úvahy z jednotkové kružnice jsou analogické.
sin (270° - α) = červená (svislá) úsečka; protože je dlouhá, jde tedy o kosinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
sin (270° - α) = - cos α

cos (270° - α) = (modrá) vodorovná úsečka; protože je krátká, jde o sinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
cos (270° - α) = - sin α

$$tg(270-\alpha)=\frac{\sin(270-\alpha)}{\cos(270-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(270-\alpha)=\frac{\cos(270-\alpha)}{\sin(270-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$$

Nyní budeme zkoumat hodnoty úhlu (270 + α):
Úvahy z jednotkové kružnice jsou analogické.

sin (270° + α) = červená (svislá) úsečka; protože je dlouhá, jde tedy o kosinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
sin (270° + α) = - cos α

cos (270° + α) = (modrá) vodorovná úsečka; protože je krátká, jde o sinus a protože směřuje do kladné poloosy, je výsledek kladný
Závěr:
cos (270° + α) = sin α

$$tg(270+\alpha)=\frac{\sin(270+\alpha)}{\cos(270+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(270+\alpha)=\frac{\cos(270+\alpha)}{\sin(270+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\mathrm{tg}\,\alpha$$

Nyní budeme zkoumat hodnoty úhlu (360 - α):
Úvahy z jednotkové kružnice jsou analogické.
sin (360° - α) = červená (svislá) úsečka; protože je krátká, jde tedy o sinus a protože směřuje do záporné poloosy, je výsledek záporný
Závěr:
sin (360° - α) = - sin α

cos (360° - α) = (modrá) vodorovná úsečka; protože je dlouhá, jde o kosinus a protože směřuje do kladné poloosy, je výsledek kladný
Závěr:
cos (360° - α) = cos α

$$tg(360-\alpha)=\frac{\sin(360-\alpha)}{\cos(360-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(360-\alpha)=\frac{\cos(360-\alpha)}{\sin(360-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\mathrm{cotg}\,\alpha$$

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Vypočtěte:
sin 330° - cos 210° + tg 150° - 0,5 tg 45°

Řešení:

sin (360°- 30°) - cos (180° + 30°) + tg (180° - 30°) - 0,5 . 1 =
= - sin 30° - (- cos 30°) + (- tg 30°) - 0,5 =

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{-3+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3}{6}=$$

$$=\frac{-3+\sqrt{3}-3}{6}=-1+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Příklad 2:

Vypočtěte:
sin 660° - cos 585° + 0,5 . tg 780° + tg 495°

Řešení:

Při řešení využijeme vlastností, že goniometrické funkce jsou periodické. U funkcí sinus a kosinus můžeme libovolně přičítat (odečítat) periodu 360°, resp. její násobky. U funkcí tangens a kotangens můžeme libovolně přičítat nebo odečítat násobky periody, kterou je 180°.

sin 660° - cos 585° + 0,5 . tg 780° + tg 495° = sin 300° - cos 225° + 0,5 . tg 60° + tg 135° =
= sin (360° - 60°) - cos (180° + 45°) + 0,5 . tg 60° + tg (90° + 45°) =
= - sin 60° - (- cos 45°) + 0,5 . tg 60° + (- cotg 45°) =

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.\sqrt{3} - 1 =$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

◈ Gon. fce úhlů větších než 90° - procvičovací příklady

1. Vypočítejte $\cos 585° =$ *1723*

Výsledek: -0,707

2. Vypočítejte $\sin(-1\ 845°) =$ *1721*

Výsledek: -0,707

3. Vypočtěte $\mathrm{tg}(7\pi/3) - \mathrm{cotg}(7\pi/3)$ *1738*

Výsledek: 1,155

4. Vypočtěte $\mathrm{tg}30° \cdot \mathrm{cotg}30° - \sin 30° \cdot \mathrm{tg}60°$ *1742*

Výsledek: 0,134

5. Vypočtěte: *1713*

$\sin^2(5\pi/3) + \mathrm{tg}(\pi/3) \cdot \cos(5\pi/6) + \mathrm{tg}(17\pi/4)$

Výsledek: 0,25

6. Vypočítejte $\sin(\pi/3) \cdot \cos(111\pi/3) \cdot \cos(-\pi/2) =$ *1725*

Výsledek: 0

7. Vypočítejte $\sin(35\pi/6) =$ *1717*

Výsledek: -0,5

8. Vypočtěte $\mathrm{tg}(-21\pi/4)$ *1730*

Výsledek: -1

9. Vypočtěte $\text{cotg}\,300°$ *1735*

Výsledek: -0,577

10. Vypočtěte $2 \cdot \text{tg}\,0° + \sin\pi - \cos(3\pi/2) - \text{cotg}(\pi/2)$ *1741*

Výsledek: 0

11. Vypočtěte $\text{tg}(-8\pi/3)$ *1733*

Výsledek: 1,732

12. Vypočítejte $\cos(-9\pi/4) =$ *1716*

Výsledek: 0,707

13. Vypočítejte $\cos(\pi/3) \cdot \cos(2\pi/3) \cdot \cos(-2\pi/3) =$ *1724*

Výsledek: 0,125

14. Vypočítejte $\sin 585° =$ *1722*

Výsledek: -0,707

15. Vypočítejte $\cos(-720°) =$ *1719*

Výsledek: 1

16. Vypočtěte $\text{cotg}(14\pi/3)$ *1728*

Výsledek: -0,577

17. Vypočtěte $\text{cotg}(-8\pi/3)$ *1732*

Výsledek: 0,577

18. Vypočtěte: *1712*

$\sin(-600°) - \cos(-1410°) - \text{tg}(-540°) - \text{tg}(-405°)$

Výsledek: 1

19. Vypočtěte $\text{tg}(7\pi/6)$ *1726*

Výsledek: 0,577

20. Vypočtěte $\text{tg}(\pi/6) - \text{cotg}(\pi/6)$ *1739*

Výsledek: -1,155

21. Vypočtěte $6 \cdot \text{cotg}(3\pi/2) - 5 \cdot \sin 2\pi + 2 \cdot \cos\pi$ *1743*

Výsledek: -2

22. Vypočítejte $\sin(-7\pi) =$ *1715*

Výsledek: 0

23. Vypočítejte $\sin 3\pi =$ *1714*

Výsledek: 0

24. Vypočítejte $\cos(39\pi/18) =$ *1718*

Výsledek: 0,866

25. Vypočítejte $\cos 1290° =$ *1720*

Výsledek: -0,866

26. Vypočtěte $\mathrm{tg}\, 300°$ *1734*

Výsledek: -1,732

27. Vypočtěte $\mathrm{cotg}(-21\pi/4)$ *1731*

Výsledek: -1

28. Vypočtěte $3\cdot\cos(\pi/2) - 4\cdot\sin(3\pi/2) + 8\cdot\mathrm{tg}\,\pi$ *1744*

Výsledek: 4

29. Vypočtěte $\mathrm{cotg}(7\pi/6)$ *1727*

Výsledek: 1,732

30. Vypočtěte $\mathrm{tg}(-13\pi/4) - \mathrm{cotg}(-13\pi/4)$ *1740*

Výsledek: 0

31. Vypočtěte $\mathrm{tg}(14\pi/3)$ *1729*

Výsledek: -1,732

32. Vypočtěte $\mathrm{tg}(-945°)$ *1737*

Výsledek: -1

33. Vypočtěte $\mathrm{cotg}(-945°)$ *1736*

Výsledek: -1

◈ Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi využíváme ke zjednodušování výrazů obsahujících goniometrické funkce a dále i k řešení goniometrických rovnic, jimiž se budeme zabývat později.

Přehled důležitých vzorců, které budeme často využívat:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

sin (-x) = - sin x
cos (-x) = cos x
tg (-x) = - tg x
cotg (-x) = - cotg x

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
tg x . cotg x = 1

sin (x + y) = sin x . cos y + cos x . sin y
sin (x - y) = sin x . cos y - cos x . sin y
cos (x + y) = cos x . cos y - sin x . sin y
cos (x - y) = cos x . cos y + sin x . sin y

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy}$$

$$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx.tgy}$$

sin 2x = 2sin x . cos x
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\left|tg\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

<u>Příklad 1:</u>

Zjednodušte: $\dfrac{\mathrm{cotg}x + \mathrm{cotg}y}{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}$

Řešení:

$$\frac{\mathrm{cotg}x + \mathrm{cotg}y}{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y} = \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x} + \frac{1}{\mathrm{tg}y}}{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y} = \frac{\frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}}{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y} = \frac{1}{\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y} = \mathrm{cotg}x \cdot \mathrm{cotg}y$$

Příklad 2:

Zjednodušte: $\sin x \cdot \mathrm{cotg}x + \cos x$

Řešení:

$$\sin x \cdot \mathrm{cotg}x + \cos x = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x = 2\cos x$$

Příklad 3:

Zjednodušte: $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

Řešení:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

Příklad 4:

Zjednodušte: $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

Řešení:

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + 1 - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 2$$

Příklad 5:

Zjednodušte: $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha}$

Řešení:

$$\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}} = \cos\alpha$$

Příklad 6:

Zjednodušte: $\dfrac{1}{1 + tg^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + cotg^2\alpha}$

Řešení:

$$\frac{1}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{1 + cotg^2\alpha} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \frac{1}{1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$$

$$\frac{1}{\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \frac{1}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Příklad 7:

Zjednodušte: $\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x) =$

Řešení:

$\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x) = 2 \cdot \sin(60^\circ/2) \cdot \cos(2x/2) = 2\sin 30^\circ \cos x = \cos x$

Příklad 8:

Upravte a udejte podmínky.

$$\frac{1-\cos^2 x}{1+tg^2 x} - \frac{\cos^2 x}{1+cotg^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Řešení:

$$\frac{1-\cos^2 x}{1+tg^2 x} - \frac{\cos^2 x}{1+cotg^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{\cos^2 x}{1 + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x \; ; \quad x \neq k\pi/2$$

Příklad 9:

Upravte a udejte podmínky.

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Řešení:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\cdot\sin x} = \frac{2\cdot(1+\cos x)}{(1+\cos x)\cdot\sin x} =$$

$$= \frac{2}{\sin x}\ ; \quad x \neq k\pi$$

Příklad 10:

Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl.

$$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos x} - 4\cdot\operatorname{cotg}^2 x\cdot\cos^2(x/2)$$

Řešení:

$$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos x} - 4\cdot\operatorname{cotg}^2 x\cdot\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos^2 x-\sin^2 x}{1-\cos x} - 4\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\cos^2(x/2) =$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{1-\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} - \frac{4\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2(x/2)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2(x/2)} - \frac{4\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2(x/2)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 8\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2(x/2)\cdot\cos^2(x/2)}{2\cdot\sin^2(x/2)\cdot\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{2\cdot\sin^2(x/2)\cdot\sin^2 x} = 0\ ; \quad x \neq k\pi$$

◈ Vztahy mezi goniometrickými funkcemi - procvičovací příklady

1. Pro všechna α, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1777*

$$\frac{tg2\alpha \cdot tg\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha}$$

Řešení:

$$\frac{tg2\alpha \cdot tg\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha} = \frac{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}}{\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} =$$

$$= \sin 2\alpha$$

Výsledek: $\sin 2\alpha$

2. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1764*

$$\frac{\sin x + \sin 5x - \sin 3x}{\cos x + \cos 5x - \cos 3x} =$$

Řešení:

$$\frac{\sin x + \sin 5x - \sin 3x}{\cos x + \cos 5x - \cos 3x} = \frac{2\cdot\sin(6x/2)\cdot\cos(4x/2) - \sin 3x}{2\cdot\cos(6x/2)\cdot\cos(4x/2) - \cos 3x} =$$

$$\frac{\sin 3x\cdot(2\cdot\cos 2x - 1)}{\cos 3x\cdot(2\cdot\cos 2x - 1)} = tg3x\ ; \quad x \neq \pi/6+k\pi/3 = \pi/6\cdot(1+2k), \quad x \neq \pm\pi/6+k\pi$$

Výsledek: $tg3x\ ;\ x \neq (2k+1)\cdot\pi/6,\ x \neq \pm\pi/6+k\pi$

3. Pro všechna $x \in R$, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1769*

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} - \cot g^2 x$$

Řešení:

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} - \cot g^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 0$$

Výsledek: 0

4. Pro všechna α, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1779*

$$\frac{1 - tg^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Řešení:

$$\frac{1 - tg^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Výsledek: $1/\cos^2\alpha$

5. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1774*

$$\frac{1}{1 - \sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{1 + \sin\alpha}$$

Řešení:

$$\frac{1}{1 - \sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{1 + \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha - 1 + \sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$\alpha \neq \pi/2 + k\pi$

Výsledek: $\sin\alpha/\cos^2\alpha$; $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$

6. Zjednodušte: $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ *1756*

Řešení: $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha$

Výsledek: $2\cos^2\alpha$

7. Zjednodušte: $\cos(45°+x) - \cos(45°-x) =$ *1758*

Řešení: $\cos(45°+x) - \cos(45°-x) = -2\cdot\sin(90°/2)\cdot\sin(2x/2) = -\sqrt{2}\cdot\sin x$

Výsledek: $-\sqrt{2}\cdot\sin x$

8. Pro všechna $x \in R$, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1770*

$$\frac{2\cdot\sin x - \sin 2x}{2\cdot\sin x + \sin 2x} - tg^2(x/2) + 2 =$$

Řešení: $$\frac{2\cdot\sin x - \sin 2x}{2\cdot\sin x + \sin 2x} - tg^2(x/2) + 2 = \frac{2\cdot\sin x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\sin x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x} - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} + 2 =$$
$$\frac{2\cdot\sin x\cdot(1 - \cos x)}{2\cdot\sin x\cdot(1 + \cos x)} - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} + 2 =$$
$$\frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) - \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} - \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} + 2 = 2$$

Výsledek: 2

9. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1776*

$$\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} + \frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}$$

Řešení: $$\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha} + \frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{2\cos(4\alpha/2)\cos(2\alpha/2)}{2\cos(6\alpha/2)\cos(2\alpha/2)} + \frac{2\sin(4\alpha/2)\cos(2\alpha/2)}{2\sin(6\alpha/3)\cos(2\alpha/2)} =$$
$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha\cos 3\alpha} = \frac{2\sin 5\alpha}{\sin 6\alpha}\ ;\quad \alpha \neq k\pi/6$$

Výsledek: $2\sin 5\alpha/\sin 6\alpha\ ;\quad \alpha \neq k\pi/6$

10. Pro všechna α, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1778*

$$\frac{2tg\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Řešení: $$\frac{2tg\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1+tg^2\alpha$$

Výsledek: $1+tg^2\alpha$

11. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1775*

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Řešení: $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha\;;\quad \alpha\neq k\pi/2$

Výsledek: $2\operatorname{tg}\alpha\;;\quad \alpha\neq k\pi/2$

12. Pro všechna α, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1780*

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

Řešení: $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$

$\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$

Výsledek: $2\operatorname{tg}2\alpha$

13. Pro všechna $x\in R$, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1771*

$$\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}-\operatorname{tg}(2x)+1=$$

Řešení: $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}-\operatorname{tg}(2x)+1=\frac{2\sin(4x/2)\cdot\cos(2x/2)}{2\cos(4x/2)\cdot\cos(2x/2)}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+1=1$

Výsledek: 1

14. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1763*

$$\frac{\sin(30°+x) - \sin(30°-x)}{\cos(60°+x) + \cos(60°-x)} =$$

Řešení: $$\frac{\sin(30°+x) - \sin(30°-x)}{\cos(60°+x) + \cos(60°-x)} = \frac{2\cdot\cos(60°/2)\cdot\sin(2x/2)}{2\cdot\cos(120°/2)\cdot\cos(2x/2)} = \sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}x\ ;$$

$x \neq \pi/2+k\pi$

Výsledek: $\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}x\ ;\quad x \neq \pi/2+k\pi$

15. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1767*

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

Řešení: $$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x} = \mathrm{cotg}^2 x\ ;\quad x \neq k\pi$$

Výsledek: $\mathrm{cotg}^2 x;\quad x \neq k\pi$

16. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1766*

$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

Řešení: $$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\sin^2 x} = \mathrm{cotg}x;\quad x \neq k\pi$$

Výsledek: $\mathrm{cotg}x;\quad x \neq k\pi$

17. Pro všechna $x \in R$, pro která má výraz smysl, zjednodušte. *1772*

$$\frac{\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}2x}$$

Řešení:

$$\frac{\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}2x} = \frac{\dfrac{\sin x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{\dfrac{\sin x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x}}{\dfrac{\sin x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos 2x}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos^2 x)} = -\sin 2x$$

Výsledek: $-\sin 2x$

18. Zjednodušte: $\sin^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha$ *1757*

Řešení:

$$\sin^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Výsledek: $1/\cos^2\alpha$

19. Upravte a udejte podmínky. *1761*

$$\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

Řešení:

$$\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\dfrac{2\sin x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin 2x \ ; \ x \neq \pi/2 + k\pi$$

Výsledek: $\sin 2x \ ; \ x \neq \pi/2 + k\pi$

20. Upravte a udejte podmínky. *1760*

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$$

Řešení: $$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = 1-\cos x \;; \quad x \neq \pi+2k\pi$$

Výsledek: $1-\cos x \;; \quad x \neq \pi+2k\pi$

21. Zjednodušte: $\dfrac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x - 1}$ *1755*

Řešení: $$\frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Výsledek: $\operatorname{cotg}^2 x$

22. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1773*

$$\frac{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \sin7\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha + \cos7\alpha} =$$

Řešení: $$\frac{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \sin7\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha + \cos7\alpha} = \frac{2\sin(8\alpha/2)\cdot\cos(6\alpha/2)+2\sin(8\alpha/2)\cdot\cos(2\alpha/2)}{2\cos(8\alpha/2)\cdot\cos(6\alpha/2)+2\cos(8\alpha/2)\cdot\cos(2\alpha/2)} =$$

$$\frac{\sin4\alpha\cdot(\cos3\alpha + \cos\alpha)}{\cos4\alpha\cdot(\cos3\alpha + \cos\alpha)} = \operatorname{tg}4\alpha \;; \quad \alpha \neq \pi/8+k\pi/4,\ \alpha \neq \pi/4+k\pi/2,\ \alpha \neq \pi/2+k\pi$$

Výsledek: $\operatorname{tg}4\alpha \;; \quad \alpha \neq \pi/8+k\pi/4,\ \alpha \neq \pi/4+k\pi/2,\ \alpha \neq \pi/2+k\pi$

23. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1768*

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{\cos 2x}$$

Řešení:

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{\cos 2x} = \frac{1-\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\cos^2x-\sin^2x} = \frac{\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{\cos^2x-\sin^2x} = \frac{1}{\cos^2x} ;$$

$x \neq \pi/2+k\pi, \quad x \neq \pi/4+k\pi/2$

Výsledek: $1/\cos^2x \; ; \quad x \neq \pi/2+k\pi, \quad x \neq \pi/4+k\pi/2$

24. Upravte a udejte podmínky. *1759*

$$\frac{\cos^2x}{1-\sin x}$$

Řešení: $\dfrac{\cos^2x}{1-\sin x} = \dfrac{1-\sin^2x}{1-\sin x} = 1+\sin x \; ; \quad x \neq \pi/2+2k\pi$

Výsledek: $1+\sin x \; ; \quad x \neq \pi/2+2k\pi$

25. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1765*

$$\frac{\sin 2x}{\cos^2x} =$$

Řešení: $\dfrac{\sin 2x}{\cos^2x} = \dfrac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x} = 2\mathrm{tg}x \; ; \quad x \neq \pi/2+k\pi = (2k+1)\cdot\pi/2$

Výsledek: $2\mathrm{tg}x \; ; \quad x \neq (2k+1)\cdot\pi/2$

26. Zjednodušte a určete podmínky, pro které má výraz smysl. *1762*

$$\sin^2x\cdot(1+\mathrm{cotg}x) + \cos^2x\cdot(1+\mathrm{tg}x) - 1 - \sin 2x$$

Řešení: $\sin^2x\cdot(1+\mathrm{cotg}x) + \cos^2x\cdot(1+\mathrm{tg}x) - 1 - \sin 2x =$

$$= \sin^2x + \sin^2x\cdot\frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2x + \cos^2x\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - \sin^2x - \cos^2x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x =$$

$= 0 \; ; \quad x \neq k\pi/2$

Výsledek: $0 \; ; \quad x \neq k\pi/2$

Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou takové rovnice, které obsahují neznámou v argumentu goniometrické funkce.

Při řešení goniometrických rovnic využijeme vztahů mezi goniometrickými funkcemi, znalosti grafů jednotlivých goniometrických funkcí a dále tabulky důležitých hodnot goniometrických funkcí. Vždy musíme vzít v úvahu periodu jednotlivých goniometrických funkcí.

Příklad 1:

Řešte rovnici sin x = 0,5

Řešení:

Z tabulky důležitých hodnot goniometrických funkcí víme, že sin x = 0,5 je splněno pro x = 30°.
Platí tedy, že $x_1 = 30° + k.360°$

Funkce sinus nabývá ale hodnoty 0,5 ještě pro úhel (180° - 30°) = 150° (k závěru dospějeme nejsnáze, pokud si představíme průběh grafu funkce sinus). Dostáváme tak druhé řešení:
$x_2 = 150° + k.360°$

Obě řešení lze vyjádřit i v obloukové míře:
$x_1 = \pi/6+2k\pi$
$x_2 = 5\pi/6+2k\pi$

Příklad 2:

Řešte rovnici:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Řešení:

Pokud je hodnota záporná, vytvoříme si nejprve hodnotu pomocnou, a to s kladným znménkem. Řešíme tedy nejprve pomocnou rovnici

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vyjde nám tak pomocný úhel $x_0 = 60°$. Protože ale hodnota má být ve skutečnosti záporná, určíme z grafu hodnotu neznámých:
$x_1 = (180° + 60°) + k.360° = 240° + k.360°$
$x_2 = (360° - 60°) + k.360° = 300° + k.360°$

I v tomto případě lze oba výsledky vyjádřit v obloukové míře:
$x_1 = 4\pi/3+2k\pi$
$x_2 = 5\pi/3+2k\pi$

Příklad 3:

Řešte rovnici sin 2x = 0,5

Řešení:

V tomto případě je vhodné použít substituci: $y = 2x$
Řešíme pak rovnici $\sin y = 0{,}5$
Z příkladu č. 1 už víme, že tato rovnice má dvě řešení:
$y_1 = 30° + k.360°$
$y_2 = 150° + k.360°$
Vrátíme se k substituci a dostaneme:
$2x_1 = 30° + k.360°$ a odtud: $x_1 = 15° + k.180°$
$2x_2 = 150° + k.360°$ a odtud: $x_2 = 75° + k.180°$

I tyto výsledky lze vyjádřit oba v obloukové míře:
$x_1 = \pi/12 + k\pi$
$x_2 = 5\pi/12 + k\pi$

Příklad 4:

Řešte rovnici: $\cos 3x \cdot \sin 2x = 0$

Řešení:

Využijeme věty, že součin se rovná nule tehdy, je-li roven nule alespoň jeden z činitelů. Proto řešení rovnice rozdělíme na dvě části:
1. část:
Řešíme $\cos 3x = 0$
Substituce: $y = 3x$
Rovnice $\cos y = 0$ má řešení:
$y_{1'} = 90° + k \cdot 360°$
$y_{2'} = 270° + k \cdot 360°$
Vzhledem k tomu, že ale $270° = 3 \cdot 90°$, vidíme, že vlastně lze oba výsledky sloučit do jednoho, protože se vlastně jedná o všechny liché násobky čísla 90°.
Získáme tak řešení:
$y_1 = (2k + 1) \cdot 90°$

Pozn.: Liché násobky vyjadřujeme $(2k + 1)$, kde k je libovolné celé číslo, a sudé násobky vyjadřujeme $2k$, kde k je libovolné celé číslo.

Vrátíme se k substituci a získáme:
$3x_1 = (2k + 1) \cdot 90°$ neboli $x_1 = (2k + 1) \cdot 30°$

2. část:
Řešíme $\sin 2x = 0$
Substituce: $y = 2x$
Rovnice $\sin y = 0$ má dvě řešení:
$y_1' = 0° + k \cdot 360°$
$y_2' = 180° + k \cdot 360°$
Vzhledem k tomu, že ale $180° = 2 \cdot 90°$ a $0° = 0 \cdot 90°$, vidíme, že se vlastně vždy jedná o sudé násobky čísla 90° a při představení si grafu zjistíme, že se jedná o všechny sudé násobky čísla 90°. Získáme tak opět jediné řešení:
$y_2 = 2k \cdot 90°$
Vrátíme se k substituci a získáme:
$2x_2 = 2k \cdot 90°$ neboli $x_2 = k \cdot 90°$

Oba konečné výsledky lze opět vyjádřit v obloukové míře:
$x_1 = \pi/6 + k\pi/3$
$x_2 = k\pi/2$

Příklad 5:

Řešte rovnici: $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

Řešení:

Substituce $y = \cos x$
Získáme tak kvadratickou rovnici $4y^2 + 4y - 3 = 0$
Zjistíme, že tato kvadratická rovnice má kořeny:
$y_1 = -1{,}5$ a $y_2 = 0{,}5$
Vrátíme se k substituci:
$\cos x_1 = -1{,}5$
Tato rovnice ale nemá řešení, protože obor hodnot funkce $y = \cos x$ je <-1; 1>
$\cos x_2 = 0{,}5$
$x_2 = 60° + k \cdot 360°$
$x_3 = (360° - 60°) + k \cdot 360° = 300° + k \cdot 360°$

Řešením tedy je $x_1 = 60° + k \cdot 360°$, $x_2 = 300° + k \cdot 360°$, neboli v obloukové míře:
$x_1 = \pi/3+2k\pi$
$x_2 = -\pi/3+2k\pi$

◈ Goniometrické rovnice - procvičovací příklady

1. Řešte rovnici: $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$ *1799*

Řešení:
$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \quad |: \cos^2 x,\ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq 90°+k\cdot 180°$
$tg^2 x - 2tg x - 1 = 0 \quad |$ substituce $y = tg x$
$y^2 - 2y - 1 = 0$
$y_{12} = (2\pm\sqrt{(4+4)})/2 \Rightarrow y_1 = 1+\sqrt{2} \Rightarrow tg x = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 67°30'+k\cdot 180°$
$y_2 = 1-\sqrt{2} \Rightarrow tg x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -22°30'+k\cdot 180°$

Výsledek: $x_1 = 67°30'+k\cdot 180°,\ x_2 = -22°30'+k\cdot 180°$

---

2. Řešte rovnici: *1812*

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot tg(x/2+\pi/4) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Řešení:

Výsledek: $\pi(1+2k)$

---

3. Řešte rovnici: $\sin^2 x + 1{,}5\cos^2 x = 2{,}5\sin x \cdot \cos x$ *1801*

Řešení:
$\sin^2 x + 1{,}5\cos^2 x = 2{,}5\sin x\cos x \quad |: \cos^2 x,\ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq 90°+k\cdot 180°$
$tg^2 x + 1{,}5 = 2{,}5 tg x \quad |\cdot 2$ substituce $y = tg x$
$2y^2 - 5y + 3 = 0$
$y_{12} = (5\pm\sqrt{(25-24)})/4 \Rightarrow y_1 = 1{,}5 \Rightarrow tg x = 1{,}5 \Rightarrow x_1 = 56°19'+k\cdot 180°$
$y_2 = 1 \Rightarrow tg x = 1 \Rightarrow x_2 = 45°+k\cdot 180°$

Výsledek: $x_1 = 56°19'+k\cdot 180°,\ x_2 = 45°+k\cdot 180°$

---

4. Řešte rovnici: 1833
$\sin 3x + \cos x = \sin x - \cos 3x$

Řešení:
$$\sin 3x + \cos x = \sin x - \cos 3x$$
$$\sin 3x - \sin x = -\cos 3x - \cos x$$
$$2\cos 2x \sin x = -2\cos 2x \cos x$$
$$2\cos 2x(\sin x + \cos x) = 0$$
$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi/2 + k\pi \Rightarrow x_1 = \pi/4 + k\pi/2$

$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \quad |:\cos x \Rightarrow \mathrm{tg}\, x = -1 \Rightarrow x_2 = 3\pi/4 + k\pi$

Výsledek: $x = \pi/4 + k\pi/2$

5. Řešte rovnici: 1832
$\sin(x + \pi/2) = \sin(\pi - 3x)$

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/8 + k\pi/2$

6. Řešte rovnici: 1828
$\mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x = 1$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = 58°17' + k \cdot 180°$, $x_2 = 31°43' + k \cdot 180°$

7. Řešte rovnici: 1808
$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos(2x + \pi/3) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/3 + k\pi$

8. Řešte rovnici: cos 2x = 1 1781

Řešení:

Výsledek: $x = k\pi$

9. Řešte rovnici: cos 2x = 2cos x 1796

Řešení:

Výsledek: $x_1 = 111°28' + k \cdot 360°$, $x_2 = 248°32' + k \cdot 360°$

10. Řešte rovnici: 1814
$$\frac{1}{\sin^2 x} + \mathrm{cotg}\, x - 1 = 0$$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/2 + k\pi$, $x_2 = 3\pi/4 + k\pi$

11. Řešte rovnici: *1785*

$\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$

Řešení:

Výsledek: $x = 2\pi/3+k\pi$

12. Řešte rovnici: *1817*

$2\cos^2 x = -\sqrt{2}\cos x$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/2+k\pi$, $x_2 = 3\pi/4+2k\pi$, $x_3 = 5\pi/4+2k\pi$

13. Řešte rovnici: *1819*

$\mathrm{cotg}^2 x = \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}x$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/2+k\pi$, $x_2 = \pi/6+k\pi$

14. Řešte rovnici: *1823*

$2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = -\pi/2+2k\pi$, $x_2 = \pi/3+2k\pi$, $x_3 = 2\pi/3+2k\pi$

15. Řešte rovnici: *1815*

$$2\mathrm{tg}x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/4+k\pi$

16. Řešte rovnici: $6\sin^2 x + 3\sin x \,.\, \cos x - 5\cos^2 x = 2$ *1800*

Řešení:

$6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$

$6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

$4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2 \quad |: \cos^2 x,\ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq 90°+k\cdot180°$

$4\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}x - 7 = 0 \quad |$ substituce $y=\mathrm{tg}x$

$4y^2 + 3y - 7 = 0$

$y_{12} = (-3\pm\sqrt{(9+112)})/8 \Rightarrow y_1=-7/4 \Rightarrow \mathrm{tg}x=-7/4 \Rightarrow x_1 = 119°45'+k\cdot180°$

$y_2=1 \Rightarrow \mathrm{tg}x=1 \Rightarrow x_2 = 45°+k\cdot180°$

Výsledek: $x_1 = 119°45'+k\cdot180°$, $x_2 = 45°+k\cdot180°$

17. Řešte rovnici: $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$ *1794*

Řešení:

Výsledek: $x_1 =-\pi/2+2k\pi$, $x_2 = \pi/6+2k\pi$, $x_3 = 5\pi/6+2k\pi$

18. Řešte rovnici: $2\mathrm{tg}\, x - 3\mathrm{cotg}\, x = 1$ *1792*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = 56°19'+k\cdot180°$, $x_2 = -45°+k\cdot180°$

19. Řešte rovnici: *1807*

$\cos(4x+\pi/2) = \sqrt{3}/2$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = -\pi/12+k\pi/2,\ x_2 = \pi/3+k\pi/2$

20. Řešte rovnici: *1791*

$$\frac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = 7\pi/6+2k\pi,\ x_2 = 11\pi/6+2k\pi$

21. Řešte rovnici: *1818*

$\mathrm{tg}^2 x = -\mathrm{tg}x$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = k\pi,\ x_2 = 3\pi/4+k\pi$

22. Řešte rovnici: *1816*

$2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = k\pi,\ x_2 = \pi/3+2k\pi,\ x_3 = 2\pi/3+2k\pi$

23. Řešte rovnici: *1810*

$\mathrm{cotg}(3x-\pi/6) = 1$

Řešení:

Výsledek: $x = 5\pi/36+k\pi/3$

24. Řešte rovnici: *1783*

$\mathrm{tg}x = \sqrt{3}/3$

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/6+k\pi$

25. Řešte rovnici: 7sin x + 4cos x = 8 *1802*

Řešení:

$$\begin{aligned}
7\sin x + 4\cos x &= 8\\
7\sin(2x/2) + 4\cos(2x/2) &= 8\\
14\sin(x/2)\cos(x/2) + 4(\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)) &= 8\sin^2(x/2) + 8\cos^2(x/2)\\
12\sin^2(x/2) - 14\sin(x/2)\cos(x/2) + 4\cos^2(x/2) &= 0 \quad \big|:\cos^2(x/2)\\
12\mathrm{tg}^2(x/2) - 14\mathrm{tg}(x/2) + 4 &= 0 \quad \big|\ \mathrm{tg}(x/2)=y\\
12y^2 - 14y + 4 &= 0 \quad \big|:2\\
6y^2 - 7y + 2 &= 0
\end{aligned}$$

$y_{12} = (7\pm\sqrt{(49-48)})/12 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y_1=2/3 \Rightarrow \mathrm{tg}(x/2)=2/3 \Rightarrow x/2=33°41'+k\cdot180° \Rightarrow x_1 = 67°22'+k\cdot360°$

$y_2=0{,}5 \Rightarrow \mathrm{tg}(x/2)=0{,}5 \Rightarrow x/2=26°33'+k\cdot180° \Rightarrow x_2 = 53°07'+k\cdot360°$

Výsledek: $x_1 = 67°22'+k\cdot360°,\ x_2 = 53°07'+k\cdot360°$

26. Řešte rovnici: *1825*

$\sin x + \sin 2x = \sin 3x$

Řešení:

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x$$
$$\sin 2x = \sin 3x - \sin x$$
$$2\sin x\cos x = 2\cos 2x \sin x$$
$$\sin x(\cos x - \cos 2x) = 0$$
$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi$$
$$\cos x - \cos 2x = 0$$
$$\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$
$$\cos x - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x) = 0$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \quad | \ y = \cos x$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$y_{12} = (1 \pm \sqrt{(1+8)})/4 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$
$$y_2 = -0,5 \Rightarrow \cos x = -0,5 \Rightarrow x_2 = 2\pi/3 + 2k\pi$$
$$x_3 = 4\pi/3 + 2k\pi$$

Výsledek: $x_1 = k\pi,\ x_2 = 2\pi/3+2k\pi,\ x_3 = 4\pi/3+2k\pi$

---

27. Řešte rovnici: *1804*

$$\frac{\sin^2 x}{\mathrm{tg}\, x} + \cos^2 x \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}$$

Řešení:

$$\frac{\sin^2 x}{\mathrm{tg}\, x} + \cos^2 x \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2} \quad | \ \mathrm{tg}\, x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$
$$\frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \quad | \ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi/2 + k\pi$$
$$\sin x\cos x + \cos x \sin x = 0,5$$
$$\sin 2x = 0,5 \Rightarrow 2x_1 = \pi/6 + 2k\pi \Rightarrow x_1 = \pi/12 + k\pi$$
$$2x_2 = 5\pi/6 + 2k\pi \Rightarrow x_2 = 5\pi/12 + k\pi$$

Výsledek: $x_1 = \pi/12+k\pi,\ x_2 = 5\pi/12+k\pi$

---

28. Řešte rovnici: *1829*

$2\cos^2 x = 3\sin x$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/6+2k\pi,\ x_2 = 5\pi/6+2k\pi$

29. Řešte rovnici: *1826*
$\sin(x/2) + \cos x = 1$

Řešení:

$$\sin(x/2) + \cos x = 1$$
$$\sin(x/2)+\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)$$
$$2\sin^2(x/2)-\sin(x/2) = 0$$
$$\sin(x/2)\cdot(2\sin(x/2)-1) = 0$$
$\sin(x/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x/2 = k\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2k\pi$

$2\sin(x/2)-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(x/2)=0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_2/2 = \pi/6+2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pi/3+4k\pi$

$x_3/2 = 5\pi/6+2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5\pi/3+4k\pi$

Výsledek: $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \pi/3+4k\pi,\ x_3 = 5\pi/3+4k\pi$

---

30. Řešte rovnici: *1827*
$\sin x + \cos 2x = 2$

Řešení:

$$\sin x + \cos 2x = 2$$
$$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$
$$3\sin^2 x - \sin x + \cos^2 x = 0$$
$$3\sin^2 x - \sin x + 1 - \sin^2 x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \quad \Big| \ y=\sin x$$
$$2y^2 - y + 1 = 0$$
$y_1 = (1\pm\sqrt{(1-8)})/4 \quad \Rightarrow \quad$ rovnice nemá řešení

Výsledek: Rovnice nemá řešení.

---

31. Řešte rovnici: *1806*
$2\sin(x/3+\pi/6) = \sqrt{3}$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/2+6k\pi,\ x_2 = 3\pi/2+6k\pi$

---

32. Řešte rovnici: tg x = 1 *1782*

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/4+k\pi$

---

33. Řešte rovnici: sin 2x = 3sin^{2}x *1797*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = k\cdot 180°,\ x_2 = 33°41'+k\cdot 180°$

---

34. Řešte rovnici: sin x . cotg 2x = 0 *1786*

Řešení:

Výsledek: $x = (1+2k)\cdot\pi/4$

---

35. Řešte rovnici: *1831*
$\cos^2 x - 6\sin x + 6 = 0$

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/2+2k\pi$

---

36. Řešte rovnici: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ *1793*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = -\pi/2+2k\pi$, $x_2 = \pi/6+2k\pi$, $x_3 = 5\pi/6+2k\pi$

37. Řešte rovnici: $\sin x \,.\, (1 + 2\cos x) = 0$ *1787*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = k\pi$, $x_2 = 2\pi/3+2k\pi$, $x_3 = 4\pi/3+2k\pi$

38. Řešte rovnici: $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$ *1790*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = -71°34'+k\cdot 180°$, $x_2 = 45°+k\cdot 180°$

39. Řešte rovnici: $\mathrm{cotg}\, 6x = -1$ *1784*

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/8+k\pi/6$

40. Řešte rovnici: $2\sin^2 x = 3\cos x$ *1795*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/3+2k\pi$, $x_2 = -\pi/3+2k\pi$

41. Řešte rovnici: $\cos 2x = \cos^2 2x$ *1803*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/4+k\pi/2$, $x_2 = k\pi$

42. Řešte rovnici: *1788*

$$\frac{\sin 2x}{\cos x} = 0$$

Řešení:

Výsledek: $x = k\pi$

43. Řešte rovnici: *1798*

$\mathrm{tg}\,\alpha = \sin 2\alpha$

Řešení:

Výsledek: $\alpha_1 = k\cdot 180°$, $\alpha_2 = 45°+k\cdot 90°$

44. Řešte rovnici: *1824*

$\sin x + \sin 2x = \sin 3x$

Řešení:

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x$$
$$\sin 2x = \sin 3x - \sin x$$
$$2\sin x\cos x = 2\cos 2x\sin x$$
$$\sin x(\cos x - \cos 2x) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = k\pi$$
$$\cos x - \cos 2x = 0$$
$$\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$
$$\cos x - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x) = 0$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \quad | \; y = \cos x$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$y_{12} = (1 \pm \sqrt{(1+8)})/4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi$$
$$y_2 = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2\pi/3 + 2k\pi$$
$$x_3 = 4\pi/3 + 2k\pi$$

Výsledek: $x_1 = k\pi,\ x_2 = 2\pi/3 + 2k\pi,\ x_3 = 4\pi/3 + 2k\pi$

---

45. Řešte rovnici: *1809*

$\mathrm{tg}(2x - \pi/6) = \sqrt{3}$

Řešení:

Výsledek: $x = \pi/4 + k\pi/2$

---

46. Řešte rovnici: sin x . cos x == 0,25 *1789*

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/12 + k\pi,\ x_2 = 5\pi/12 + k\pi$

---

47. Řešte rovnici: *1820*

$$\frac{\sin^2 x}{\mathrm{tg}x} + \cos^2 x \cdot \mathrm{tg}x = 1$$

Řešení:

$$\frac{\sin^2 x}{\mathrm{tg}x} + \cos^2 x \cdot \mathrm{tg}x = 1$$
$$\frac{\sin^2 x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}} + \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$
$$\sin x\cos x + \sin x\cos x = 1$$
$$\sin 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = \pi/2 + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \pi/4 + k\pi$$

Výsledek: $x = \pi/4 + k\pi$

---

48. Řešte rovnici: *1821*

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \mathrm{cotg}\,x$$

Řešení:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \mathrm{cotg}\,x$$

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Big| \cos x \neq 0,\ \sin x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\pi/2$$

$$\sin x + \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\sin x + \sin^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \Big| \ y=\sin x$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$y_{12} = (-1\pm\sqrt{(1+8)})/4 \ \Rightarrow\ y_1=-1 \ \Rightarrow\ \sin x = -1 \ \Rightarrow\ x = -\pi/2+2k\pi \ \Rightarrow$ NŘ

$y_2=0,5 \ \Rightarrow\ \sin x = 0,5 \ \Rightarrow\ x_1 = \pi/6+2k\pi$

$x_2 = 5\pi/6+2k\pi$

Výsledek: $x_1 = \pi/6+2k\pi,\ x_2 = 5\pi/6+2k\pi$

---

49. Řešte rovnici: *1805*

$\sin(2x-\pi/4) = -0,5$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = 17\pi/24+k\pi,\ x_2 = 25\pi/24+k\pi$

---

50. Řešte rovnici: *1811*

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3} = 0$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = 2\pi/3+k\pi,\ x_2 = \pi/6+k\pi$

---

51. Řešte rovnici: *1822*

$$\mathrm{cotg}\,x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$$

Řešení:

$$\mathrm{cotg}\,x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \quad \Big| \ \sin x \neq 0,\ \cos x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\pi$$

$$\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x = 2\sin x(1+\cos x)$$

$$\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x-2\sin x\cos x = 0$$

$$\cos x+1-2\sin x(1+\cos x) = 0$$

$$(\cos x+1)(1-2\sin x) = 0$$

$\cos x+1 = 0 \ \Rightarrow\ \cos x = -1 \ \Rightarrow$ nemá řešení

$1-2\sin x = 0 \ \Rightarrow\ \sin x = 0,5 \ \Rightarrow\ x_1 = \pi/6+2k\pi$

$x_2 = 5\pi/6+2k\pi$

Výsledek: $x_1 = \pi/6+2k\pi,\ x_2 = 5\pi/6+2k\pi$

---

52. Řešte rovnici: *1830*

$2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/3+2k\pi,\ x_2 = 5\pi/3+2k\pi$

53. Řešte rovnici: *1813*

$\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x - 2/\sqrt{3} = 0$

Řešení:

Výsledek: $x_1 = \pi/3+k\pi,\ x_2 = 5\pi/6+k\pi$

◈ Sinová věta

Sinová věta

Věta: V trojúhelníku ABC platí: a : b : c = sinα : sinβ : sinγ

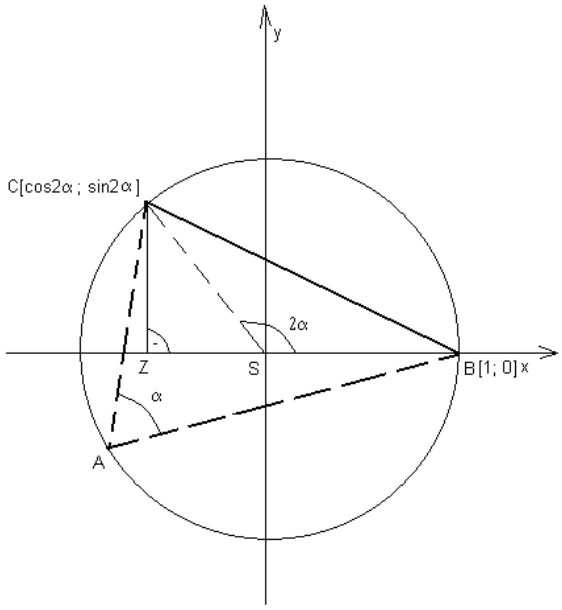
Lze zapsat i jinak:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma};\quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

nebo

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Důkaz:



Volme jednotkovou kružnici.
Platí:

$$|BC| = a = \frac{a}{r}$$

Použijeme pro trojúhelník ZBC Pythagorovu větu:

$$\left|BC\right|^2 = \frac{a^2}{r^2} = \sin^2 2\alpha + (1-\cos 2\alpha)^2 = \sin^2 2\alpha + 1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha =$$

$$= 2 - 2\cos 2\alpha = 2.(1-\cos 2\alpha) = 2.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$$

$$= 2.2\sin^2\alpha = 4\sin^2\alpha$$

$$\frac{a^2}{r^2} = 4\sin^2\alpha$$

a, r, sinα jsou kladné hodnoty, proto můžeme odmocnit a dostaneme:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

Obdobně bychom dokázali:

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2r \; ; \; \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Odtud tedy platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Slovní vyjádření věty:
Poměr dvou stran v trojúhelníku je roven poměru sinů protilehlých úhlů.

Užití sinové věty:
Známe-li buď dva úhly a jednu stranu nebo dvě strany a úhel ležící proti jedné z nich.

Sinová věta platí pro obecný trojúhelník, nikoliv tedy jen pro trojúhelník pravoúhlý.

Příklad 1:

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a = 123,07 m
β = 65° 30´ 12´´
γ = 72° 02´ 36´´

Známe stranu a, proto potřebujeme znát i úhel ležící proti ní. Snadno ho vypočteme:
α = 180° - (β + γ) = 180° - (65° 30´ 12´´ + 72° 02´ 36´´) = 180° - 137° 32´ 48´´ =
= 42° 27´12´´

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$b = \frac{a.\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$b = \frac{123{,}07.\sin 65°30'12''}{\sin 42°27'12''}$$

b = 165,92 m

$$\frac{a}{\sin\,\alpha} = \frac{c}{\sin\,\gamma}$$

$$c = \frac{a.\sin\,\gamma}{\sin\,\alpha}$$

$$c = \frac{123{,}07.\sin\,72°02'36''}{\sin\,42°27'12''}$$

c = 173,45 m

V zadaném trojúhelníku má tedy úhel α velikost 42°27´12´´, strana b je dlouhá 165,92 metru a strana c má délku 173,45 m.

◈ Sinová věta - procvičovací příklady

1. Určete velikost úhlů a poměr stran v trojúhelníku, jehož úhly jsou v poměru 4 : 5 : 6. *1848*

Výsledek: $a : b : c \doteq 0{,}74 : \sqrt{3}/2 : 0{,}95$

2. Jak vysoká je věž, vidíme-li její patu z okna, umístěného 15 m nad horizontální rovinou, v hloubkovém úhlu α = 12°50' a vrchol ve výškovém úhlu ß = 25°12'40'' ? *1845*

Výsledek: 46 m

3. Aby mohla být stanovena vzdálenost dvou bodů A, B oddělených od sebe řekou, byla na jednom břehu řeky změřena základna |AC| = b = 136 m a úhly |∢CAB| = α = 70°21'51'', |∢ACB| = γ = 43°44'9'' . Jaká je vzdálenost bodů A, B ? *1843*

Výsledek: 103 m

4. Určete délku strany a trojúhelníka ABC, je-li dáno: *1836*
b = 16,52 m, ß = 38°49'48'', γ = 25°31'12''

Výsledek: 23,75 m

5. Určete délku strany c trojúhelníka ABC, je-li dáno: *1838*
a = 135,3 m, ß = 48°50'32'', γ = 107°16'17''

Výsledek: 319,1 m

6. Ze dvou míst A, B na moři, jejichž vzdálenost je 3 740 m, byla pozorována loď L pod úhly |∢LAB| = 72°35', |∢LBA| = 81°41'. Vypočtěte vzdálenost lodi od obou míst A, B. *1842*

Výsledek: 8 523,3 m   8 219 m

7. Určete velikost vnitřního úhlu při vrcholu B trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1841*
a = 746,38 m, c = 1 854,4 m, γ = 145°6'40''

Výsledek: 21° 34´ 48´´

8. Určete délku strany b trojúhelníka ABC, je-li dáno: *1837*

$a = 135{,}3$ m, $ß = 48°50'32''$, $\gamma = 107°16'17''$

Výsledek: 251,6 m

9. Vypočti stranu c, je-li v trojúhelníku ABC dáno: *1835*

$b = 16{,}52$ m, $ß = 38°49'48''$, $\gamma = 25°31'12''$

Výsledek: 11,35 m

10. Určete ostatní úhly v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1839*

$b = 13{,}6$ m, $c = 22{,}5$ m, $ß = 21°38'10''$

Výsledek:

$\gamma_1 \doteq 37{,}59° \doteq 37°35'22''$

$\gamma_2 \doteq 142{,}41° \doteq 142°24'38''$

$\alpha_1 = 180° - ß - \gamma_1 \doteq 120{,}77° \doteq 120°46'28''$

$\alpha_2 = 180° - ß - \gamma_2 \doteq 15{,}95° \doteq 15°57'12''$

11. Z výšiny, ležící 80 m nad hladinou rybníka, je vidět mrak ve výškovém úhlu 56° a jeho obraz ve vodě v hloubkovém úhlu 58°. Jak vysoko je mrak nad hladinou rybníka ? *1849*

Výsledek: 2094 m

12. Nepřístupný bod C v rovině byl zaměřen ze dvou stanovišť A, B, jejichž vzdálenost c = 56 m, pod úhly $|\sphericalangle BAC| = 49°57'$, $|\sphericalangle ABC| = 68°20'$. Jaký je součet vzdáleností bodu C od obou pozorovatelen? *1834*

Výsledek: 107,8 m

13. 15 m vysoká budova je vzdálena 30 m od břehu řeky. Z vodorovné střechy této budovy je vidět šířku řeky pod úhlem 15°. Jak široká je řeka? *1844*

Výsledek: 43,3 m

14. Určete velikost úhlů a poměr stran v trojúhelníku, jehož úhly jsou v poměru 2 : 3 : 4. *1847*

Výsledek: $a : b : c \doteq 0{,}64 : \sqrt{3}/2 : 0{,}98$

15. Určete velikost úhlů a poměr stran v trojúhelníku, jehož úhly jsou v poměru 1 : 2 : 3. *1846*

Výsledek: $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$

16. Určete velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1840*

$a = 746{,}38$ m, $c = 1\,854{,}4$ m, $\gamma = 145°6'40''$

Výsledek: 13° 18´ 36´´

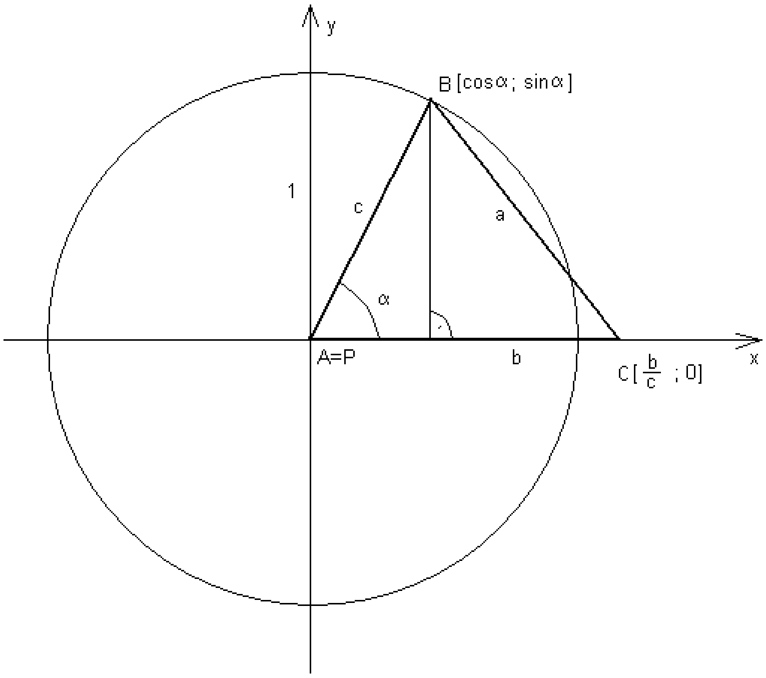
◈ Kosinová věta

Kosinová věta

Věta: Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ , a stranami a, b, c platí:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

Důkaz:



$$a^2 = |BC|^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

$$|BC|^2 = \left(\frac{b}{c} - \cos\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha = \frac{b^2}{c^2} - 2\frac{b}{c}\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$$

$$= \frac{b^2}{c^2} + 1 - \frac{2b}{c}\cos\alpha$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

Je-li $\alpha > 90°$, pak $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ a platí tedy:
$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos(180° - \alpha)$

Kosinová věta platí též, podobně jako sinová věta, pro obecný trojúhelník.

<u>Příklad 1:</u>

Řešte trojúhelník, je-li dáno: a = 7 cm, c = 4 cm, β = 78°

Řešení:

a = 7 cm
c = 4 cm
β = 78°
b = ? [cm]
α = ? [° ´]
γ = ? [° ´]

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$
$b^2 = 7^2 + 4^2 - 2 . 7 . 4 . \cos 78°$
$b^2 = 49 + 16 - 56 . \cos 78°$
$b^2 = 53{,}3576$
b = 7,3 cm (po zaokrouhlení)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\sin\alpha = \frac{a.\sin\beta}{b}$$
$$\sin\alpha = \frac{7.\sin 78°}{7{,}3} = 0{,}9379$$

α = 69° 42´

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\sin\gamma = \frac{c.\sin\alpha}{a}$$
$$\sin\gamma = \frac{4.\sin 69°42'}{7} = 0{,}5359$$

γ = 32° 24´

Závěr: Zbývající prvky trojúhelníka jsou b = 7,3 cm, α = 69° 42´, γ = 32° 24´.

Poznámka: Úhly α a γ můžeme též vypočítat podle Kosinové věty:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos\alpha$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\alpha = \frac{7{,}3^2 + 4^2 - 7^2}{2.7{,}3.4} = 0{,}3474$$

α = 69°40´

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos\gamma$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$\cos\gamma = \frac{7^2 + 7{,}3^2 - 4^2}{2.7.7{,}3} = 0{,}8443$$

γ = 32°24´

Výsledky jsou tedy přibližně stejné. Nepatrná odchylka vznikla zaokrouhlením úhlů na minuty. Kdybychom počítali ve vteřinách, byly by výpočty přesnější.

◈ Kosinová věta - procvičovací příklady

1. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 4 : 5 : 6$ *1872*
Výsledek: 82° 49´

2. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 2 : 3 : 4$ *1869*
Výsledek: 104° 29´

3. Určete velikost strany a v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1863*
$\alpha = 26° 38´16´´$, b = 683,1 m, c= 534,7 m
Výsledek: 315,5 m

4. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1866*
a = 40 m, b = 23 m, c= 23 m
Výsledek: 120° 49´

5. Vypočítejte největší úhel trojúhelníku, jehož strany mají velikosti: *1881*
$2x;\ 3x/2;\ 3x;\ x > 0$
Výsledek: 117° 17´

6. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1861*
$\alpha = 26° 38´16´´$, b = 683,1 m, c= 534,7 m
Výsledek: 49° 27´

7. Určete velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: *1853*
$a = 4,\ b = 6,\ \gamma = 60°$
Výsledek: 5,3

8. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1859*
a = 6 m, b = 11 m, c= 7 m
Výsledek: 115° 23´

9. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1858*
a = 6 m, b = 11 m, c= 7 m
Výsledek: 29° 32´

10. Určete velikost výslednice dvou sil o velikostech 1 250 N a 750 N působících v témže bodě a svírajících úhel 50°. *1857*
Výsledek: 1 825 N

11. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1865*
a = 40 m, b = 23 m, c= 23 m
Výsledek: 29° 35´ 30´´

12. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1879*
a = 16,9 m, b = 26 m, c= 27,3 m

Výsledek: 75° 45´

13. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1862*
α = 26° 38´16´´, b = 683,1 m, c= 534,7 m

Výsledek: 103° 55´

14. Určete velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: *1851*
$a = 5,\ b = 6,\ \gamma = 60°$

Výsledek: 5,6

15. Silnice, vedoucí po hrázi rybníka, má být po zrušení rybníka nahrazena přímou zkratkou. Její krajní body A, B jsou zaměřeny z bodu C pod úhlem 60°, přičemž $|CA| = 421$ m, $|CB| = 233$ m. Jak bude zkratka dlouhá? *1850*

Výsledek: 365,3 m

16. Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $\alpha = 156°30'$. Rychlost prvního vlaku má velikost $v_1 = 13\ ms^{-1}$, rychlost druhého vlaku má velikost $v_2 = 14,5\ ms^{-1}$. Jak daleko budou od sebe vlaky za 5,5 minuty? *1884*

Výsledek: 8 885 m

17. Určete velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: *1854*
$a = 5,\ b = 4,\ \gamma = 45°$

Výsledek: 3,6

18. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1877*
a = 16,9 m, b = 26 m, c= 27,3 m

Výsledek: 36° 52´

19. Určete velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: *1852*
$a = 3,\ b = 4,\ \gamma = 90°$

Výsledek: 5

20. Jaké úhly svírá se svými složkami o velikostech F_1, F_2 jejich výslednice o velikosti R, jestliže $F_1 = 2R/3$; $F_2 = R$. *1876*

Výsledek: 70° 32´ 38° 56´

21. Určete vzdálenost dvou bodů A,B, které jsou na druhém břehu řeky, jestliže známe vzdálenost a = 2 000 m bodů C, D a jestliže jsme teodolitem změřili velikosti úhlů: $|\sphericalangle BDC| = \alpha = 52°40'$; $|\sphericalangle ACD| = \beta = 42°1'$; *1883*
$|\sphericalangle ADC| = \gamma = 86°40'$; $|\sphericalangle BCD| = \delta = 81°15'$

Výsledek: 1635 m

22. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 1 : 2 : 3$ *1873*

Výsledek: Trojúhelník neexistuje

23. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 1 : 2 : 3$ *1875*

Výsledek: Trojúhelník neexistuje.

24. Vypočítejte největší úhel trojúhelníku, jehož strany mají velikosti: 43; 57; 50 *1880*

Výsledek: 75° 11´

25. Tři kružnice s poloměry $r_1 = 5$; $r_2 = 4$; $r_3 = 6$ se vzájemně dotýkají vně. Vypočítejte velikosti úhlů, které svírají jejich středné. *1882*

Výsledek: 59° 70° 32´ 50° 28´

26. Určete velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: $a = 5$, $b = 4$, $\gamma = 30°$ *1855*

Výsledek: 2,5

27. Určete velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: $a = 3$, $b = 5$, $\gamma = 120°$ *1856*

Výsledek: 7

28. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1864*
$a = 40$ m, $b = 23$ m, $c = 23$ m

Výsledek: 29° 35´ 30´´

29. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 1 : 2 : 3$ *1874*

Výsledek: Trojúhelník neexistuje.

30. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 4 : 5 : 6$ *1870*

Výsledek: 41° 25´

31. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 4 : 5 : 6$ *1871*

Výsledek: 55° 46´

32. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a: b : c = 2 : 3 : 4$ *1868*

Výsledek: 46° 34´

33. Určete velikost úhlu β v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1878*
$a = 16{,}9$ m, $b = 26$ m, $c = 27{,}3$ m

Výsledek: 67° 23´

34. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku ABC, je-li dáno: *1860*
$a = 6$ m, $b = 11$ m, $c = 7$ m

Výsledek: 35° 05´

35. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC, jehož poměr stran je $a : b : c = 2 : 3 : 4$ *1867*

Výsledek: 28° 57´

Obsah